

LIÇÕES DE CÁLCULO

Limites, derivadas e integrais
em uma variável real.

FELIPE GUI SOLI &
PROF. ENGENHEIRO

314

"A Matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas suprema beleza

— uma beleza fria e austera, como a da escultura, sem apelo a nenhuma parte de nossa natureza mais fraca, sem os esplendores sensuais da pintura ou da música, e ainda assim sublimemente pura, e capaz de uma perfeição severa como apenas as maiores artes conseguem apresentar. O espírito matemático, alimentado por essa visão, possui qualidades que se elevam acima do terreno e passageiro; ele habita na região eterna, ou ao menos pode nela permanecer, e ali encontra, como companheiros, os mais nobres dos pensamentos, e os mais sagrados dos anseios."

Bertrand Russell

Sumário

Prefácio	ix
1 Introdução	1
1.1 Ideias e procedimentos	1
1.2 Como usar esse livro	2
1.3 Pré-requisitos	3
2 Como surgiram as ideias?	7
2.1 O cálculo de áreas: Cálculo Integral	7
2.1.1 Calculando a área de um círculo por meio de triângulos	9
2.1.2 Arquimedes de Siracusa e a área do segmento de parábola	11
2.1.3 Conclusão	15
2.2 O cálculo de retas tangente: Cálculo Diferencial	18
2.2.1 Fermat e o cálculo de tangentes horizontais	18
2.2.2 O problema da reta tangente	24
2.3 O cálculo infinitesimal: Limites	26
2.3.1 Os infinitesimais	26
2.3.2 O cálculo de limites	29
2.4 Problemas	32
2.5 Exercícios	32
2.6 Resoluções dos Problemas	33
3 Limites	43
3.1 Intuição	43
3.1.1 Por que criar uma nova operação?	43
3.1.2 Estimando limites	45
3.2 Limites laterais	50
3.3 Limites infinitos	53
3.3.1 Quando a função tende a infinito	53
3.3.2 Quando x tende a infinito	56
3.4 Continuidade	57
3.4.1 Teorema de Bolzano	63
3.4.2 Teorema do Valor Intermediário	64

3.5	Propriedades dos limites	66
3.5.1	Algumas aplicações	67
3.5.2	Vários exemplos	68
3.5.3	Indeterminações do tipo potência: 0^0 , ∞^0 ou 1^∞	77
3.5.4	Teorema do Confronto	78
3.6	Definição Formal de Limite	80
3.7	Problemas	87
3.8	Exercícios	88
3.9	Resoluções dos Problemas	90
4	Derivadas: Cálculo e Técnicas	99
4.1	Definição	99
4.1.1	Notação de Leibniz	104
4.1.2	Propriedades da derivada	105
4.2	Derivadas elementares	107
4.2.1	Polinômios e Funções Irracionais	107
4.2.2	Funções Trigonométricas	109
4.2.3	Funções Exponenciais	110
4.2.4	Funções Logarítmicas	111
4.3	Regra da Cadeia e Derivação Implícita	112
4.4	Derivabilidade e Continuidade	119
4.5	Diferencial	121
4.5.1	Derivada como taxa de variação	121
4.5.2	O diferencial como linguagem do Cálculo	123
4.6	Problemas	125
4.7	Exercícios	126
4.8	Resoluções dos Problemas	129
5	Derivadas: Aplicações	137
5.1	Taxas Relacionadas	137
5.2	O Teorema do Valor Médio e Problemas de Otimização	140
5.2.1	Teorema de Rolle e Problemas de Otimização	140
5.2.2	Teorema do Valor Médio	149
5.3	Derivadas e Gráficos	152
5.3.1	A derivada primeira	152
5.3.2	A derivada segunda	154
5.3.3	Esboçando gráficos	156
5.4	Aproximações e Séries de Taylor	164
5.4.1	Séries clássicas	167
5.5	Regra de L'Hôpital	170
5.6	Problemas	175
5.7	Exercícios	176
5.8	Resoluções dos Problemas	180

6	Integrais	193
6.1	Ideia Básica do Cálculo Integral	194
6.2	Teorema Fundamental do Cálculo	205
6.3	Integrais Indefinidas	219
6.4	Ferramentas Básicas para Cálculo de Integrais	221
6.4.1	Integrais Elementares	221
6.4.2	Propriedades Básicas da Integração	223
6.5	Modelagem de Integrais – Uma Introdução	229
6.5.1	Notação de Leibniz na Integração	230
6.6	Problemas	237
6.7	Exercícios	238
6.8	Resoluções dos Problemas	240
7	Integrais: Cálculo e Técnicas	247
7.1	Introdução	247
7.2	Integração por Substituição	248
7.3	Integração por Partes	258
7.3.1	Ideia da Técnica	258
7.3.2	Estratégia para escolha das variáveis	261
7.4	Integração por Substituição Trigonométrica	265
7.5	Integração de Funções Racionais	270
7.5.1	Integração por Frações Parciais	271
7.6	Integrais Impróprias	274
7.6.1	Intervalo contendo o infinito	274
7.6.2	Funções com descontinuidade do tipo infinito	280
7.7	Problemas	286
7.8	Exercícios	288
7.9	Resoluções dos Problemas	293
8	Integrais: Aplicações	311
8.1	Área entre Curvas	311
8.2	Comprimento de Curvas	314
8.3	Volume	316
8.3.1	Área de seção transversal $A(x)$ conhecida	316
8.3.2	Cascas Cilíndricas	324
8.4	Centro de Massa	332
8.4.1	Corpos Unidimensionais	332
8.4.2	Corpos bidimensionais	336
8.4.3	Corpos tridimensionais	341
8.5	Aplicações Gerais	345
8.5.1	Valor médio de uma função	346
8.5.2	Área de Superfície de Revolução	349
8.5.3	Outros Problemas de Física	352
8.6	Problemas	357
8.7	Exercícios	360

8.8 Resoluções dos Problemas	365
A Número de Euler	393
B Soma dos quadrados dos n primeiros números naturais	399
C Frações Parciais	401
D Derivadas vs Integrais	409



Prefácio

O Coelho Branco ajeitou os óculos e perguntou:
— Por onde devo começar, Majestade?
— Hmm... vejamos... comece do começo — disse o Rei, pesando cada palavra que dizia, — prossiga a leitura até o fim, e então pare de ler.

Alice no País das Maravilhas, Lewis Carrol

Ensinar Matemática é uma arte (não ao acaso que Aritmética e Geometria se enquadravam dentre as *Sete Artes Liberais* da Antiguidade Clássica). Ao longo de minha carreira, percebi que existem inúmeros “professores” de Matemática, mas pouquíssimos são os que realmente a *ensinam*, isto é, fazem com que seus alunos aprendam o conteúdo. Dentre esse ínfimo número de bons professores, encontram-se os autores deste livro, posso dizer. Há mais de um ano trabalhando com eles no Universo Narrado, auxiliando os alunos com suas dúvidas e questionamentos, pude me deparar com situações praticamente nunca vistas por mim antes. Com efeito, percebi dezenas de alunos que iniciaram o curso Lições de Matemática sem terem entendido o conteúdo visto em seus colégios, porém, ao terminar o referido curso, eles conseguem demonstrar teoremas com uma certa maestria. (Ouso, inclusive, dizer que você que lê estas páginas pode ter sido um desses alunos que mencionei!)

Dito isso, foi com muita honra que aceitei o convite de revisar o presente texto. Para mim, o Cálculo sempre foi uma das disciplinas mais fascinantes da Matemática; e espero que, também, o seja para você, caro leitor! Ainda me lembro bem do meu primeiro dia na faculdade de Matemática. Cheguei pensando: “Eu já devo ter visto todo (ou quase todo) o conteúdo de Matemática. Não deve ter muito a mais do que aprender, certo?” Eu não poderia estar mais enganado... Na minha primeira aula (*Cálculo Diferencial e Integral I*, como é chamado este curso na UFMG), percebi que havia um abismo enorme — beirando o infinito — entre o que eu sabia de Matemática e o que eu ainda precisaria aprender. Por isso, guardo um carinho especial por esta disciplina: ela é, ao mesmo tempo, intrigante e fascinante. Por uma incrível coincidência, acabei lecionando disciplinas de Cálculo durante meu mestrado e meu doutorado.

O trabalho do Felipe Guisoli e do Engenheiro que você, nobre aluno, tem em mãos, servirá de guia durante sua jornada no curso Lições de Cálculo. Com ele, você

irá se aventurar em um mundo desconhecido da Matemática: o chamado *infinito*. Causa de grandes discussões ao longo do tempo, aqui ele será tratado com o padrão Universo Narrado; e você, com certeza, sairá deste curso dominando as principais técnicas para lidar com o infinito. Tudo se iniciará com uma abordagem histórica para motivá-lo, com vistas a apresentá-lo aos problemas clássicos que motivaram os matemáticos (desde a Grécia Antiga até a Europa Moderna) a desenvolverem o Cálculo. (Você perceberá que algo de inusitado ocorreu neste desenvolvimento: as ideias foram formalizadas na ordem contrária com que o rigor matemático exige!) Em seguida, você será conduzido à principal — e mais útil — ferramenta do Cálculo: os *limites*. De fato, todo o Cálculo pode ser resumido em limites; e portanto, saber operá-los é de suma importância para nós! Após aprendida essa técnica, você a utilizará para calcular *derivadas* e *integrais* de funções com uma variável real. Tudo isso com um amplo leque de aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento, para que você, aluno, possa vislumbrar como a Matemática pode ser útil para resolver problemas reais do cotidiano. (Sem contar com uma lista infindável de exercícios!)

Desejo que este livro possa cumprir com seu propósito: o de auxiliar você a adquirir o conhecimento do Cálculo. Além disso, espero que você possa, assim como eu, divertir-se enquanto estuda Matemática!

Belo Horizonte, maio de 2025

Luís Felipe S. Amaral

Doutor em Matemática pela UFMG

Capítulo 1

Introdução

1.1 Ideias e procedimentos

A Matemática é comumente apresentada, desde os primeiros contatos na escola até o fim do Ensino Médio e, muitas vezes, na própria universidade, de modo bastante procedimental. Neste caso, o foco reside em fazer com que o estudante domine a mecânica da execução de um processo, sem necessariamente compreender o que o fundamenta e o justifica.

Isso se evidencia com clareza ao ouvir tantos alunos perguntarem *para quê serve a fórmula de Bháskara?*, ou *de onde vem o Teorema de Pitágoras?*, ou ainda *por quê raios seno ao quadrado mas cosseno ao quadrado é igual a 1?*. Essa última eu ouvi conversando com um filósofo, o ilustre professor Clóvis de Barros. Note que todas essas perguntas evidenciam a desconexão que o estudante possui em relação às origens, aos fundamentos e aos princípios por trás das ideias. A atenção alocada foi apenas no procedimento: em aplicar uma fórmula, girar uma manivela e obter um número no final do processo, qualquer que seja o seu significado.

Acreditamos que essa abordagem da Matemática, além de reduzir uma nobre e sofisticada área do pensamento a apenas procedimentos mecânicos sem sentido, afasta o estudante e o desconecta do seu real propósito, desestimulando o estudo, uma vez que o objeto de estudo parece não fazer sentido algum.

Por outro lado, existe uma forma — aparentemente pouco ortodoxa, diga-se de passagem — de se estudar em que o foco está não na parte procedimental ou ferramental, mas no entendimento e no desenvolvimento das ideias. O cerne, neste caso, está em responder de onde vem o Teorema de Pitágoras, para quê serve a Fórmula de Bháskara ou por que raios o quadrado do seno mais o quadrado do cosseno é sempre igual a 1, muito mais do que saber operacionalizar essas ações. Nesse sentido, entende-se a Matemática não apenas como uma desconexa execução de procedimentos que fornecem resultados mágicos, mas sim como uma ferramenta filosófica que aumenta a capacidade de abstração de quem a exercita. Consequentemente, o estudo da Matemática se torna uma forma de compreender verdades eternas e imutáveis, de

elevar o espírito, de estimular e desenvolver o intelecto e, como pensavam os gregos, de acessar o eterno. Platão escreve, no livro VII da *República*, que

“A geometria atrai a alma para a verdade.”

Consideramos que a visão dos gregos a respeito do significado e do papel da Matemática é muito mais apurada, útil e eficiente ao estudo do que a atual. Os autores deste livro acreditam que este consiste no aspecto mais interessante, belo e empolgante da Matemática. Além do mais, acredita-se que isso torna o estudo — como um todo — mais motivador, uma vez que as ideias começam a se conectar e tudo passa a fazer sentido, deixando de ser um amontoado de fórmulas mágicas que entregam resultados prontos.

Apesar de que este não deve ser o cerne do estudo, entende-se, contudo, que há sim importância na parte procedimental e mecânica, em se ter o domínio das operações e da parte processual dos cálculos, o que muitas vezes é adquirido não apenas com o entendimento, mas também com repetição.

Dito isso, este é um livro sobre ideias e procedimentos, uma tentativa de obter um bom equilíbrio entre os dois. Objetiva-se que o leitor o conclua não apenas maste-rizando todas as operações e problemas do Cálculo, mas também — e principalmente — entendendo suas ideias, seus fundamentos, sua origem histórica e seu significado. Temos a plena convicção de que essa é única forma de estudar Matemática que vale a pena, que é prazerosa, empolgante e que, ao fim, justifica o esforço. Se conseguimos lograr êxito em tal empreitada, compete ao leitor, tendo percorrido este caminho, dar o seu veredito.

Por fim, vale destacar que fazer os cálculos é importante, mas lembre-se que hoje existe uma infinidade de recursos, softwares e inteligências artificiais que farão todos os cálculos, certamente, com muito mais velocidade e eficiência que o leitor. Neste contexto, faz-se mais importante, portanto, dominar os princípios e os fundamentos que possibilitam a criação e operação dessas tecnologias. Veja que a tecnologia e a modernidade nos possibilitam a melhor escolha: trocar a parte operacional e focar apenas na parte criativa do processo. Afinal de contas, Matemática é arte, o resto é fazer conta.

1.2 Como usar esse livro

Em alguns momentos, uma ideia ou outra é sugerida ao longo da teoria, porém, sem avanços ou detalhamentos na sua explicação. Isso é feito de forma intencional, com o objetivo de estimular o leitor a pensar por si mesmo e de tentar encontrar alguns caminhos com as ferramentas que ele já tem em mãos.

Para elucidar e deixar claro tanto as ideias quanto a execução, sempre resolvemos diversos exemplos ao longo da exposição da teoria. Os exemplos são sempre escolhidos de modo a tentar desdobrar, ao longo de sua resolução, diferentes aspectos e facetas daquele corpo de ideias.

Ao final de cada capítulo sempre o concluímos com a seção de **Problemas e Exercícios**. Eles são divididos por seção, de modo que recomenda-se que o leitor, ao

concluir a leitura de uma certa seção de determinado capítulo, sempre se direcione ao seu fim para fazer os Problemas e Exercícios daquela seção. A diferença entre esses dois é que os problemas possuem resolução comentada ao final do capítulo, enquanto os exercícios contêm apenas as respostas. Fazendo isso, busca-se ampliar a autonomia e o repertório de resoluções e raciocínios do leitor. Recomenda-se, contudo, que sempre haja a tentativa de resolver os problemas sozinho, antes de ler sua resolução. Esta deve ser consultada apenas a título de verificação ou após ter-se investido tempo suficiente tentando resolver o problema por si só. Ao longo de todo o texto — entre exemplos durante a exposição teórica e problemas ao fim do capítulo — são resolvidos mais de 250 exercícios, de modo que os autores acreditam que o leitor estará bem servido no aspecto procedimental no que tange ao domínio das habilidades para resolver problemas e todas as suas etapas. Os exercícios ao final de cada seção objetivam dar espaço para que o leitor pratique um pouco mais e consiga dominar melhor a mecânica das operações por meio da repetição — o que julgamos importante, mas certamente não central.

Além disso, associado ao livro, é possível que o leitor se matricule, também, no curso com aulas, que leva o mesmo título do livro: Lições de Cálculo. O curso passa pela exposição de todo o conteúdo do livro, servindo de apoio, complemento e espaço para esclarecer dúvidas do leitor. Ademais, busca-se no curso apresentar versões diferentes de demonstrações que foram apresentadas no livro, bem como outros tipos de exemplos e alguns aspectos da teoria que foram omitidos no livro, a título de não deixar a leitura muito extensa. Acreditamos que a experiência de assistir às aulas, associando-as à leitura do livro, será uma excelente experiência de aprendizado para qualquer tipo de estudante — seja os que possuem mais dificuldade, seja aqueles que querem se aprofundar para um pouco além da leitura.

1.3 Pré-requisitos

Certa vez, ao ser indagado por um rei sobre qual seria o caminho mais curto e objetivo para aprender geometria, o grego Euclides respondeu:

“Não existe estrada real para a geometria.”

Pois se nem reis encontram atalhos, que esperança resta a vós, destemido leitor, senão a de marchar a pé, com paciência e teimosia, pelos ásperos caminhos do saber?

Ora, a Matemática é uma linguagem lógica e exige que cada bloco, a ser construído em cima do outro, garanta abaixo de si uma estrutura firme e sólida para que o edifício não desabe ao se defrontar com o primeiro desafio. Isso é excelente, pois garante que, respeitando as etapas e a ordem lógica do estudo dos conceitos, construa-se um edifício inabalável e indestrutível, fortificado sob alicerces que são imutáveis e eternos. Ocorre que quase a totalidade dos estudantes não se formam munidos de tais alicerces — o que por si só já evidencia enorme lacuna no nosso sistema de ensino. Dito isso, tornou-se lugar comum em qualquer curso ou livro de Cálculo iniciar os estudos pelo *Pré-Cálculo* — como se uma dúzia de páginas pudessem, por encanto, suprir três anos de deficiência de estudos e transformar o leitor em um iniciado nos mistérios da

Matemática. Aqui, porém, somos forçados à sinceridade: se fôssemos cumprir honestamente tal propósito, precisaríamos de uns cinco volumes encadernados, cada qual com não menos que umas quatrocentas páginas, para ao menos arranhar a superfície do que seria necessário.

Desse modo, não faremos o desserviço de iludir o leitor gastando papel com o que se intitularia de *Pré-Cálculo*, posto que o verdadeiro Pré-Cálculo consiste em conhecer, com desenvoltura, praticamente toda a Matemática do Ensino Médio — e não apenas conhecê-la de ouvir dizer, mas compreendê-la, entender sua construção, seu significado e suas conexões: trazê-la no sangue, pronta a ser invocada sem hesitação. Tentar fazer isso em 10 ou 20 páginas é uma tarefa irrealizável.

Adianto que, para incentivar o leitor, a experiência dos professores que vos escreve evidencia que o principal e — de longe, muito longe — maior entrave que os estudantes encontram no Cálculo são justamente as deficiências na base da Matemática. Para quem a tem, a jornada do Cálculo será o próximo passo natural, a extensão óbvia de seus conhecimentos e um belo e prazeroso passeio. Para quem não a possui, a jornada será tortuosa e difícil. Quem não estiver devidamente armado para a batalha matemática fará melhor em retroceder e se fortalecer, antes de ousar cruzar as fronteiras deste novo mundo.

Por isso, encerramos este capítulo — por cortesia, e apenas por cortesia — com uma pequena coletânea das principais fórmulas — fatoração, Trigonometria, Geometria Analítica, Álgebra — que o estudante deve dominar sem titubeios. Se o leitor não dominar¹ ao menos 80% delas, recomenda-se retroceder e retornar ao texto apenas quando estiver bem preparado. Não se acanhe nem se desanime: essa é a forma correta de trilhar o caminho, do contrário, as dificuldades e desprazeres serão muitos.

Fatorações

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

¹Não confunda dominar com apenas ter visto, com se lembrar vagamente ou conhecer alguma frase infantil que o permita escrever a fórmula de prontidão. Quando dizemos dominar uma equação, pressupõe-se que o leitor a compreende, sabe possivelmente construí-la do zero e entende os tipos de problemas e contextos em que ela se aplica com clareza.

Álgebra

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a^x) = x \ln a$$

Geometria Analítica

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Trigonometria

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

$$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$$

$$1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$$

Além das equações acima, é imprescindível que o leitor conheça as principais funções, seus gráficos, comportamentos e características, tais como as funções afim, quadráticas, exponenciais, trigonométricas, modulares e logarítmicas. Dominar essas equações é o mínimo que se exige para não naufragar já nos primeiros parágrafos. Esta é a linha tênue que separa o viajante audaz do náufrago presunçoso. Considere-a sua última advertência.

Capítulo 2

Como surgiram as ideias?

É quase consenso em qualquer curso universitário ou livro didático ensinar o Cálculo Integral e Diferencial pela tradicional ordem: limites, derivadas e, por fim, integrais. Essa, contudo, é a exata ordem inversa na qual as ideias foram desenvolvidas historicamente. Este capítulo, por ser o início da nossa jornada, visa fazer esse reparo histórico, não com fins academicistas, mas puramente didáticos.

Como as ideias e os conhecimentos se desenvolvem? Normalmente, em uma ordem que parece fazer mais sentido, que é mais intuitiva, onde as peças parecem se encaixar de forma mais harmônica. Depois de todo o quebra-cabeças montado, podemos acabar descobrindo que começamos pelo final, mas, se o fizemos, é porque aquele pareceu de fato ser o melhor caminho naquele momento.

Dito isso, estudar o desenvolvimento das ideias do cálculo a partir da sua ordem histórica — e usando os próprios conhecimentos e ferramentas que existiam naquela época — tende a trazer muito mais clareza e a deixar muito mais palpáveis as ferramentas como elas são utilizadas hoje, além também da razão de terem sido desenvolvidas.

2.1 O cálculo de áreas: Cálculo Integral

O leitor, em algum momento, já se questionou por qual motivo estuda-se tanto triângulos em Geometria Plana na escola? Estudamos várias formas de se calcular áreas de triângulos, teoremas específicos para triângulos, triângulos retângulos, Lei dos Senos, Lei dos Cossenos, Teorema de Pitágoras, e por aí vai. Mas não parece haver tantos objetos triangulares por aí fora no universo, então por que se importar tanto com o estudo dessa forma geométrica?

Acontece que a atitude do matemático ao encarar certo problema desconhecido muitas vezes é fugir de resolver o problema diretamente. É comum tomar um caminho que consiste em reduzir aquele problema a alguma versão mais simples, ou algumas versões mais simples de serem resolvidas. Então, resolvem-se as versões simplificadas e, depois de juntar as peças, tem-se a solução do problema original. Portanto, se

alguém conhece diferentes formas de, digamos, calcular a área de um triângulo, passa a ser possível calcular a área de praticamente qualquer figura plana.

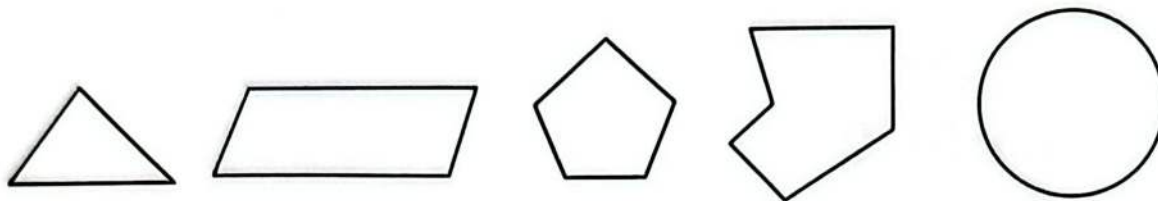


Figura 2.1: Diferentes figuras da Geometria Plana.

Isso porque praticamente qualquer objeto plano pode ser dividido e totalmente recoberto por triângulos, de tal forma que todo conhecimento de áreas de figuras planas pode, caso se queira, ser reduzido ao cálculo de áreas de triângulos. Até mesmo figuras curvas, como uma circunferência, podem ser varridas por uma infinidade de triângulos bem estreitos — algo não tão diferente do que ocorre quando você fatia uma pizza —, exceto pelo fato de que, nesse caso, a base do nosso “triângulo” parece ser curva, mas, se os pedaços fossem extremamente finos e a quantidade de fatias, consequentemente, mais numerosa, seria possível dividir a pizza em uma certa quantidade de pedaços exatamente triangulares, como mostra a última imagem da Figura 2.2.

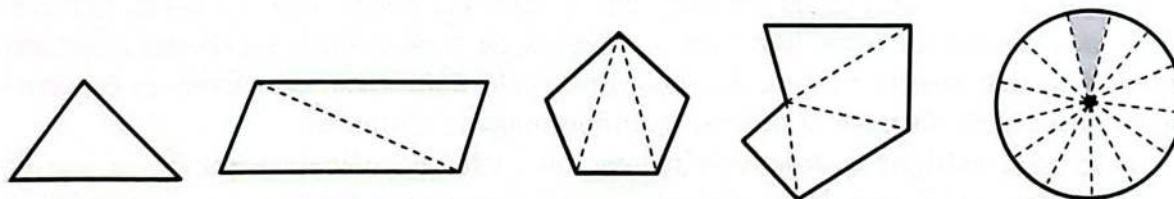


Figura 2.2: Quase qualquer figura pode ser decomposta em triângulos.

Pode parecer algo meio estranho, mas os gregos faziam isso lá pelo século V a.C., de onde remontam as origens do Cálculo Integral. A ideia toma forma com o astrônomo Eudoxo de Cnido, que calculava áreas de figuras inscrevendo e circunscrevendo-as em polígonos regulares, de cada vez mais lados, a fim de que sua aproximação fosse cada vez melhor.

A área da figura, digamos um círculo, como mostra a Figura 2.3, seria algo entre o polígono inscrito e o circunscrito, uma vez que a figura se situa entre eles. Essa forma de se calcular — ou pelo menos estimar — áreas de figuras ficou conhecida como Método da Exaustão, que, como o próprio nome indica, devia ser bem exaustivo. O método consistia essencialmente em pegar a figura cuja área se deseja calcular e inscrevê-la em um polígono de muitos lados ao mesmo tempo que ela circunscrevia um outro polígono de muitos lados. A área da figura em questão ficaria *sandwichada* entre os dois polígonos, de modo que seu valor seria sempre algo entre a área do polígono externo e a do interno.

Quanto maior a quantidade de lados dos polígonos — daí o nome do método



Figura 2.3: O Método da Exaustão de Eudoxo.

—, mais eficiente era a aproximação, de modo que alguém poderia, escolhendo arbitrariamente um número muito grande de lados, encontrar uma aproximação tão boa quanto se queira para a área da figura.

2.1.1 Calculando a área de um círculo por meio de triângulos

Vamos tentar fazer exatamente o que os gregos fizeram, porém usando notações e conceitos mais atuais. O objetivo será entender a essência do Cálculo Integral: subdividir uma figura cuja área se deseja calcular em diversas figuras mais simples cuja área se sabe calcular — digamos triângulos ou retângulos.

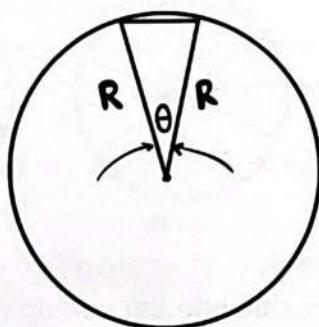


Figura 2.4: Divisão do círculo em triângulos.

Façamos a divisão do círculo a partir do seu centro em n triângulos iguais, cujo ângulo central vale, naturalmente,

$$\theta = \frac{2\pi}{n}.$$

Podemos calcular a área de um triângulo de lados a e b , sendo θ o ângulo formado entre eles, por meio da equação (viu só como é importante conhecer bem os triângulos?):

$$A_T = \frac{ab \sin(\theta)}{2}.$$

Logo, no nosso triângulo, temos $a = b = R$, de tal modo que a área fica sendo

$$A_T = \frac{1}{2} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right). \quad (2.1)$$

A área A_C do nosso círculo será, aproximadamente, n vezes a área acima, uma vez que estamos cobrindo a circunferência com n triângulos:

$$A_C \approx \sum A_T = \underbrace{A_T + A_T + \cdots + A_T}_{n \text{ vezes}} = n \cdot A_T. \quad (2.2)$$

Ou seja, usando as Equações (2.1) e (2.2), tem-se:

$$A_C \approx \frac{n}{2} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right). \quad (2.3)$$

A aproximação será tão melhor quanto menor for o ângulo central do triângulo e, conseqüentemente, quanto mais triângulos tivermos. A Figura 2.5 deixa isso claro para 6, 12 e 26 triângulos. Por meio dela, o leitor deve usar a imaginação para visualizar como seria para $n = 50$, para $n = 100$ ou mesmo para $n = 1.000.000$. Feito isso, é possível que você se convença de que, à medida que o número de triângulos aumenta significativamente — e eles vão, por consequência, ficando cada vez mais estreitos —, a circunferência começa a se confundir com a varredura dos triângulos, e as duas figuras tendem a se aproximar.

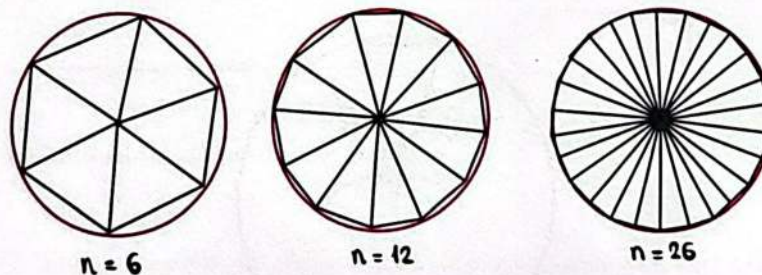


Figura 2.5: Aproximando um círculo por triângulos.

De tal modo que, para n muito grande, digamos um bilhão, ou um trilhão, ou o maior número que você puder imaginar, a aproximação na Fórmula (2.3) tende ao valor exato da área do círculo. Ora, caso o leitor esteja convencido disso, podemos avançar nos cálculos.

Se n é muito grande, então o argumento do seno é muito pequeno, uma vez que este é inversamente proporcional a n . Sendo assim, podemos usar a aproximação clássica de ângulos pequenos ¹ em que

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx \theta,$$

¹Essa aproximação é de fato bem clássica e será utilizada diversas vezes ao longo do texto. Ela pode ser facilmente compreendida de forma geométrica, visualizando os valores de seno, tangente, e do arco em radianos, para ângulos pequenos. Futuramente tal relação será compreendida com mais rigor por meio das séries e polinômios de Taylor.

sendo, no último termo, o ângulo em radianos.

Mais uma vez vale ressaltar que, apesar de estarmos usando aproximações, no limite em que n é realmente muito grande, essas coisas ficam tão próximas, que torna-se praticamente impossível distingui-las, tornando-se uma igualdade. Se o leitor ainda não estiver convencido disso, tente avaliar quanto vale o seno e a tangente de um bilionésimo de radiano e compare essas três grandezas. Depois repita para um trilionésimo de radiano, depois para o quadrado disso e, no fim, você certamente terá se convencido.

Fazendo essa aproximação, uma vez que o argumento do seno já é um ângulo em radianos, teríamos:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \approx \frac{2\pi}{n},$$

o que nos leva, pela Equação (2.3), a

$$A_C = \frac{n}{2} R^2 \left(\frac{2\pi}{n}\right) = \pi R^2,$$

que é a conhecida fórmula para a área do círculo, obtida aqui por meio da divisão do círculo em uma infinidade de triângulos muito estreitos.

Essa é a essência do Cálculo Integral: dividir uma área desconhecida em um punhado de triângulos (na verdade, em retângulos, mas em breve chegaremos nisso) e somar todos esses triângulos para obter a área total da figura. O maior desconforto do leitor a esse momento deve ser algo do tipo:

Ora, mas isso é apenas uma aproximação. Por melhor que seja, é só uma boa aproximação. O que me garante que essa fórmula está correta e fornece a área exata do círculo?

Antes de lhe responder, vamos a mais um exemplo.

2.1.2 Arquimedes de Siracusa e a área do segmento de parábola

Varrer a área de uma figura geométrica a partir de triângulos é algo tão poderoso, que o grego Arquimedes de Siracusa, no século III a.C., chegou a calcular a área de um segmento de parábola usando essa técnica.

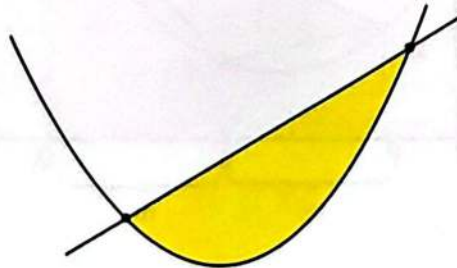


Figura 2.6: Área de um segmento de parábola.

Mostraremos exatamente como ele fez isso. Comece com a parábola descrita pela função $f(x) = x^2$. Vamos, primeiro, construir uma propriedade que será importante no desenvolvimento. Escolha dois pontos A e B quaisquer da parábola e pegue o ponto N tal que a abscissa de N está exatamente no meio do caminho entre as abscissas de A e B . Se a abscissa de A for denotada por a e a de B por $a + 2m$, então a abscissa do ponto N será $(a + m)$, ou seja, a média aritmética das abscissas de A e B .

Nosso objetivo inicial será obter uma expressão para a área do triângulo ANB . Para isso, trace o segmento que conecte os pontos A e B e chame de M a projeção vertical do ponto N em tal segmento, como mostra a segunda imagem da Figura 2.7.

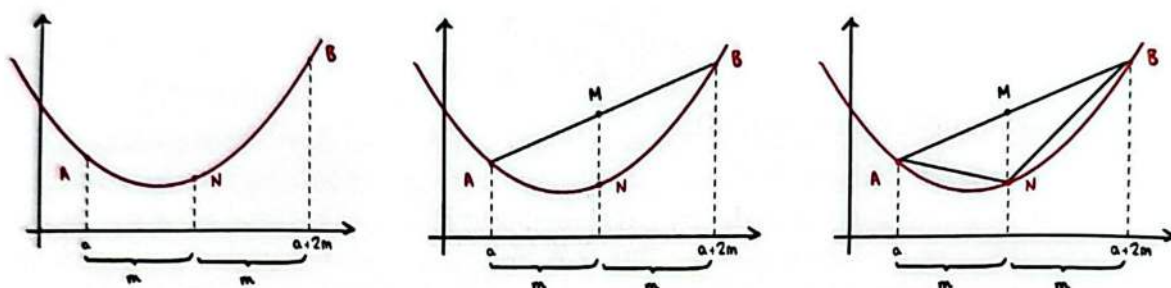


Figura 2.7: Área do triângulo inscrito na parábola.

A área que queremos — do triângulo ANB — será o dobro da área de ANM , uma vez que os triângulos ANM e MNB possuem a mesma base $\overline{MN}$ e alturas de mesma medida m , relativas a tal base. Desse modo, podemos escrever que

$$A_{ANB} = \frac{1}{2}(\overline{MN})m + \frac{1}{2}(\overline{MN})m = (\overline{MN})m. \quad (2.4)$$

Considere agora o trapézio $APQB$, onde P e Q são as projeções no eixo horizontal dos pontos A e B ; e S é a projeção horizontal do ponto N , como ilustra a Figura 2.8. Como $\overline{MS} = \overline{MN} + \overline{NS}$ é a base média do trapézio, ela é a média aritmética das

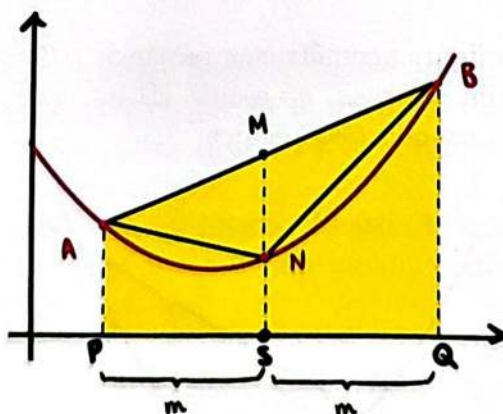


Figura 2.8: Destacando o trapézio $APQB$.

bases. Logo,

$$\overline{MN} + \overline{NS} = \frac{\overline{AP} + \overline{BQ}}{2}. \quad (2.5)$$

Em tal quadrilátero, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= f(a) = a^2, \\ \overline{BQ} &= f(a + 2m) = (a + 2m)^2, \\ \overline{NS} &= f(a + m) = (a + m)^2. \end{aligned}$$

Substituindo essas relações na Equação (2.5), chegamos em $\overline{MN} = m^2$ que, pela Equação (2.4), nos fornece

$$A_{ANB} = m^3,$$

que é justamente o resultado que queríamos construir: dado um segmento de reta AB , com $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pertencentes a uma parábola, e tal que $x_B - x_A = 2m$, o triângulo ANB inscrito na parábola, sendo a abscissa de N o ponto médio da projeção de $\overline{AB}$ no eixo horizontal, tem área igual a m^3 .

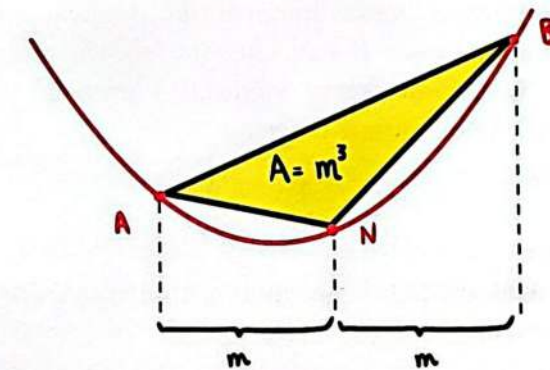


Figura 2.9: Área do triângulo inscrito no arco de parábola.

Munidos desse dado, podemos avançar no cálculo. Inicialmente coloque o ponto A no vértice da parábola que, nesse caso, está localizado na origem. Seja b a abscissa do ponto B , de tal modo que a abscissa do ponto N é $b/2$ e a área do triângulo ANB , A_T , fica sendo, portanto,

$$A_T = m^3 = \left(\frac{b}{2}\right)^3 = \frac{b^3}{8}.$$

Esse valor de A , por si só, já seria uma primeira aproximação para a área do segmento delimitado pelo segmento de reta $\overline{AB}$ e a parábola, a qual denominaremos por A_P :

$$A_P \approx A_T.$$

Uma aproximação um tanto grosseira, o leitor poderia dizer, tal como a primeira aproximação para a área do círculo na primeira imagem da Figura 2.5. O que precisamos fazer é ir repetindo esse processo, escolhendo o ponto N_1 , cuja abscissa é a

média aritmética das abscissas de A e N , ou seja, ela vale $b/4$. A área do triângulo AN_1N vale, portanto:

$$A'_T = m^3 = \left(\frac{b}{4}\right)^3 = \frac{b^3}{64} = \frac{A_T}{8}.$$

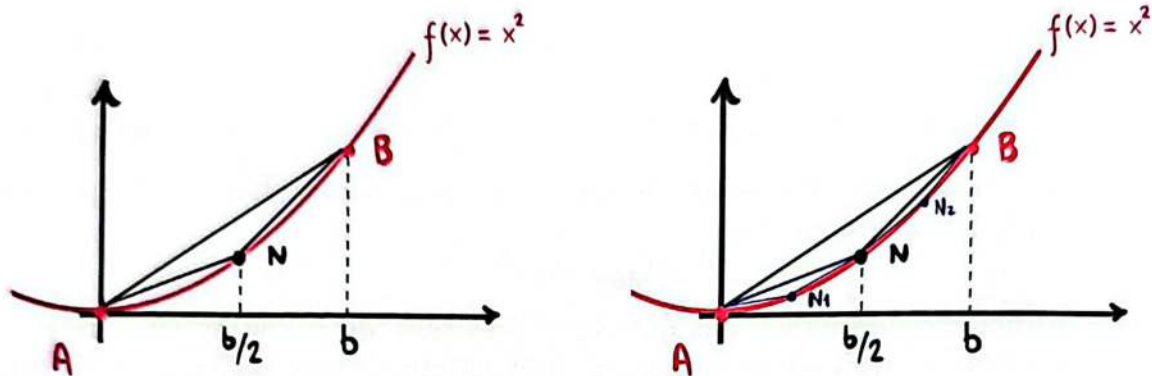


Figura 2.10: Varrendo a parábola por triângulos.

Fazendo o mesmo na parte superior da parábola, pega-se o ponto N_2 , cuja abscissa é a média aritmética das abscissas de B e N , ou seja, ela vale $3b/4$. A área do triângulo AN_2N ficará, aplicando a mesma regra, idêntica à área de AN_1N . Desse modo, somando essas duas áreas, adicionamos o termo

$$\frac{A_T}{8} + \frac{A_T}{8} = \frac{A_T}{4}$$

à nossa aproximação da área da parábola, melhorando tal valor para

$$A_P \approx A_T + \frac{A_T}{4}.$$

Fazendo esse processo repetidas vezes, podemos chegar tão próximos quanto quisermos da área do segmento de parábola. Isto é, pega-se o ponto N_3 , cuja abscissa é a média aritmética das abscissas de A e N_1 , ou seja, ela vale $b/8$. Depois pega-se o ponto N_4 entre N_1 e N , o ponto N_5 entre N e N_2 e o ponto N_6 entre N_2 e B . Com isso, adicionaremos a área de outros 4 triângulos à nossa aproximação, sendo a área de cada um deles dada por

$$A''_T = m^3 = \left(\frac{b}{8}\right)^3 = \frac{b^3}{512} = \frac{A_T}{64}.$$

Como são 4, estaremos adicionando o termo $4A_T/64$ à nossa aproximação, de modo que agora ela se torna

$$A_P \approx A_T + \frac{A_T}{4} + \frac{A_T}{16}.$$

Ora, fazendo esse processo iteradas vezes, vemos que a sobreposição dos triângulos vai preenchendo o segmento de parábola, e as duas figuras se confundem quanto

maior for o número de triângulos, ou seja, quanto mais vezes repetirmos o processo. Podemos dizer que, repetindo-o infinitamente, a área tenderá exatamente para o valor da área da parábola, isto é

$$A_P = A_T + \frac{A_T}{4} + \frac{A_T}{16} + \frac{A_T}{64} + \dots$$

em que a soma possui infinitos termos.

Tal expressão trata-se de uma progressão geométrica de razão $q = 1/4$ e termo inicial $a_1 = A_T$, cuja soma, apesar de ter infinitos termos, converge para um número finito, sendo seu valor conhecido e dado por

$$A_P = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{A_T}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4A_T}{3}.$$

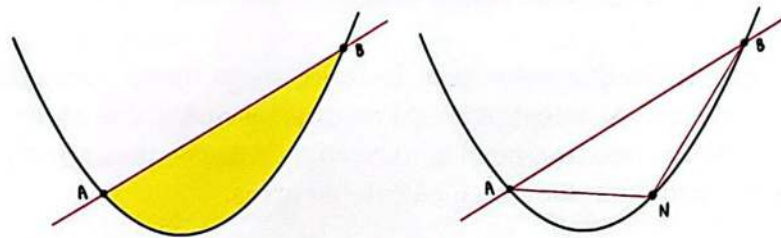


Figura 2.11: A área do segmento de parábola.

Ou seja, a área entre a parábola e o segmento de reta $\overline{AB}$ na Figura 2.11 é exatamente igual a quatro terços da área do triângulo ANB , em que N é tal que sua projeção no eixo horizontal fica exatamente a meia distância das abscissas de A e B . Esse fato foi demonstrado por Arquimedes e constitui uma sofisticação do Método da Exaustão de Eudoxo. Arquimedes também calculou a área do círculo, além de outros cálculos importantes usando essa técnica.

É claro que tudo que fizemos aqui foi usando uma notação e recursos matemáticos que não existiam na Grécia Antiga. Contudo, a menos de algumas diferenças de notação, em essência esse foi o raciocínio de Arquimedes.

2.1.3 Conclusão

Perceba que, no último exemplo, o princípio por trás do que fizemos foi dividir a parábola em triângulos, certificarmos-nos de que o método — perpetuando-se infinitamente — faz com que os triângulos varram por completo a parábola e, somando as áreas dos infinitos triângulos, tem-se a área da parábola.

Isso é o coração do Cálculo Integral: para calcular uma área desconhecida, dividimos essa área em diversas figuras geométricas mais simples — triângulos ou retângulos. Percebemos que é preciso, para cobrir bem a área dessa figura, que essa divisão seja infinita: é preciso de infinitos triângulos muito estreitos para varrer exatamente um círculo, ou infinitos deles muito pequenos a ponto de caber nas beiradas

da parábola e varrê-la por completo. Por fim, somando essas infinitas áreas, obtemos a área da figura em questão: o resultado desejado.

É importante o leitor notar aqui a presença do infinito. O raciocínio é, em síntese, pegar um problema complexo cuja solução é desconhecida, dividi-lo em muitos (infinitos) problemas mais simples cuja solução é conhecida e, no final, somar todas as infinitas peças para montar o quebra-cabeça da solução completa. A primeira vez que tive contato com essa ideia, confesso que me causou certa estranheza. Dividir um problema em problemas mais simples me pareceu inteligente, mas, sendo eles infinitos, ter que somar infinitos pedaços para compor a solução do problema original me pareceu algo oneroso: não é trivial somar até o infinito. Será que isso não levaria um tempo infinito? Será que sempre seria possível realizar esse processo?

E, posto que o método consiste em quebrar o problema em soluções conhecidas, a grande novidade do Cálculo Integral e Diferencial é apenas uma: lidar com o infinito. Coisas infinitesimais, retângulos de larguras infinitamente pequenas, somas de infinitos termos e por aí vai. Esse será o principal conceito e o principal desafio deste livro.

Que fique registrado que a essência do processo de integração acaba de lhe ser apresentada, caro leitor. As integrais possuem diversas aplicações na Física e também na própria Matemática que transcendem o cálculo de áreas, mas a sua origem é essa. Tudo, em alguma medida, remonta ao cálculo de áreas.

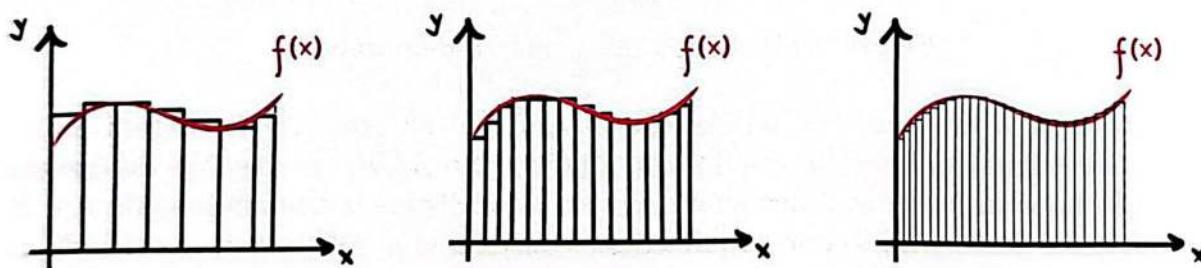


Figura 2.12: O cálculo integral para avaliar áreas.

O problema do Cálculo Integral é o de achar, de modo geral, a área abaixo de uma curva descrita pela função $f(x)$, como mostra a Figura 2.12. A diferença é que lá sempre dividiremos a área que se deseja calcular em retângulos — que são até mais simples do que os triângulos usados por Arquimedes — e, como a figura mostra, quanto mais finos forem esses retângulos, mais a soma das suas áreas aproximar-se-á da área abaixo da curva, tendendo para exatamente o seu valor quando... pois é: quando a largura dos retângulos for infinitamente pequena e, consequentemente, tivermos infinitos deles.

Posto que a essência do Cálculo Integral lhe foi apresentada, parece-me interessante levantar possíveis cenários de aplicações dessa técnica para além de áreas, a fim de que seja possível o leitor começar a se dar conta do grande poder e da grande extensão de aplicação dessa ferramenta.

Vamos para um exemplo diferente no campo da Física. Digamos que é conhecida a

expressão para se calcular a força elétrica F entre duas partículas — mas tal expressão só vale para partículas pontuais, isto é, muito pequenas.



Figura 2.13: A força elétrica entre duas partículas pontuais.

Caso tenhamos uma barra — cujas dimensões, portanto, não são desprezíveis — carregada negativamente, como poderíamos calcular a força elétrica de interação entre a barra e carga pontual? Ora, se tudo que sabemos é calcular a força entre cargas pontuais, podemos dividir a barra em um pedaço tão pequeno, de modo que isolemos um único ponto, a fim de calcular primeiro a força de interação entre esse ponto e a carga de cima. Isso pode ser feito pela fórmula conhecida por nós, uma vez que esse é seu contexto de validade: cargas muito pequenas.

Fazendo isso ao longo de toda a barra, ou seja, dividindo-a em infinitos pedaços muito pequenos, é possível computar, pela fórmula que conhecemos, a força entre cada pedacinho desses e a carga de cima. Por fim, para obtivermos a força total feita pela barra na carga, basta somar essas infinitas contribuições de força feitas por cada pedaço da barra.

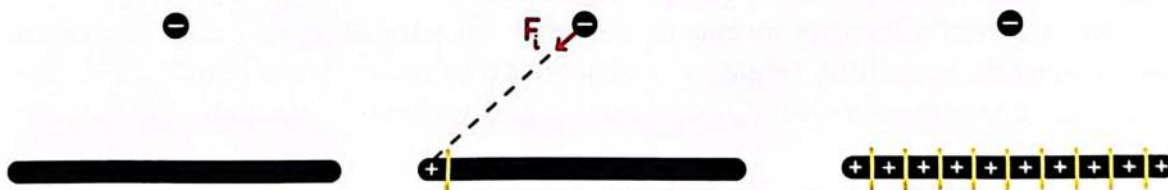


Figura 2.14: Dividindo a barra em infinitos pedaços muito pequenos reduzimos o problema ao cálculo da força entre cargas pontuais.

E quem é que soma infinitos pedaços de problemas simples para chegar à solução de um problema completo? Pois é. Os gregos. Arquimedes. E, em breve, você, por meio do cálculo de integrais.

Espero que o leitor tenha se deliciado ao compreender ao menos um pouco da profundidade dessa técnica. Agora que está claro qual é o objetivo do Cálculo Integral, o quão antiga é sua origem e como podemos aplicar isso em outras áreas do conhecimento, podemos partir para o segundo problema clássico do Cálculo.

2.2 O cálculo de retas tangente: Cálculo Diferencial

2.2.1 Fermat e o cálculo de tangentes horizontais

Vamos começar com um problema que foi resolvido por Pierre de Fermat no século XVII antes da invenção do Cálculo Integral e Diferencial.

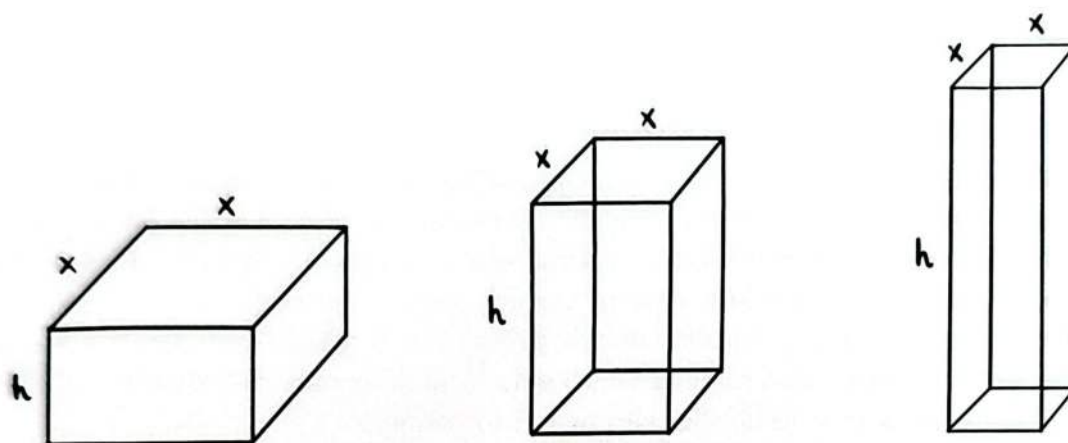


Figura 2.15: Diferentes formas de construir um paralelepípedo de base quadrada tal que a soma da altura, largura e profundidade seja sempre a mesma.

Considere um paralelepípedo reto retângulo, de base quadrada, tal que a soma da sua largura, sua profundidade e sua altura seja sempre igual a 45. Qual é o valor do lado da base quadrada desse objeto que maximiza o seu volume?

Ora, existem diferentes formas de construir tal paralelepípedo mantendo constante a soma de sua altura, largura e profundidade, como mostra a Figura 2.15. Deve existir alguma entre essas que otimiza o seu volume, tornando-o máximo. Inicialmente sabemos que

$$2x + h = 45,$$

donde o volume da caixa, $V = x^2 \cdot h$, é

$$V(x) = -2x^3 + 45x^2. \quad (2.6)$$

Um breve esboço do gráfico² da função dada pela Equação (2.6) aparece na Figura 2.16. Como era de se esperar, tal função deve admitir um máximo — existe um valor de x para o qual $V(x)$ é máximo.

A genial ideia de Fermat consiste no seguinte: escolha dois valores de x , digamos x_1 e x_2 , com $x_1 \neq x_2$, mas tal que $V(x_1) = V(x_2)$. Desse modo, existe sempre uma

²No Capítulo 5 construiremos uma teoria que nos permitirá construir, do zero, o gráfico de qualquer função. Por hora, confie nos autores que este é o aspecto do gráfico ou, para os mais céticos, plote em algum software e veja por si mesmo.

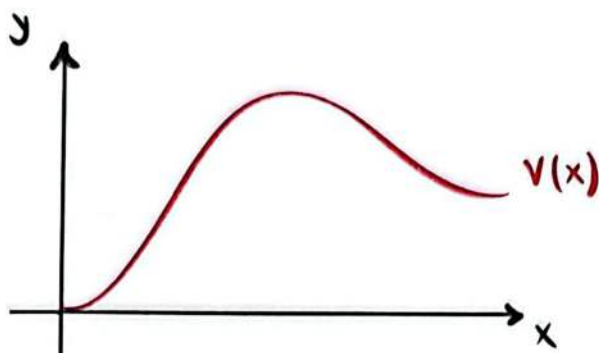


Figura 2.16: Volume da caixa em termos do lado x da sua base quadrada.

reta horizontal conectando esses dois pontos, tal como mostra a primeira imagem da Figura 2.17.

A ideia consiste em ir aproximando esses valores de x_1 e x_2 um do outro sempre mantendo $V(x_1) = V(x_2)$ e $x_1 \neq x_2$, por mais próximos que eles estejam. Num certo momento, como mostra a última imagem da Figura 2.17, eles estarão tão próximos — infinitesimalmente próximos — que estarão praticamente convergindo para o mesmo valor, de modo que os dois pontos que a reta horizontal cortava do gráfico se tornarão praticamente um: a reta secante se aproximará cada vez mais de uma tangente no ponto de volume máximo e, assim, conseguiremos obter tal valor de x que maximizará o volume.

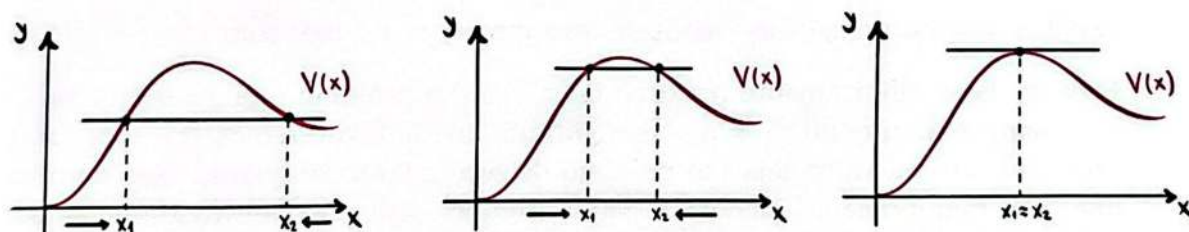


Figura 2.17: A genial ideia do francês Pierre de Fermat.

Ora, se $V(x_1) = V(x_2)$, então

$$-2x_1^3 + 45x_1^2 = -2x_2^3 + 45x_2^2,$$

que, desenvolvendo — e usando os produtos notáveis da diferença de quadrados e de cubos — nos leva a

$$45(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 2(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2). \quad (2.7)$$

Sendo x_1 infinitamente próximo de x_2 , mas ainda diferente dele, o termo $(x_2 - x_1)$ fica cada vez mais próximo de zero, mas nunca chega de fato a ele. Desse modo, podemos simplificar tal termo na Equação (2.7), ficando com

$$45(x_2 + x_1) = 2(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2). \quad (2.8)$$

Ora, no caso em que queremos, os valores de x_1 e x_2 serão tão próximos, mas tão próximos, que serão praticamente indistinguíveis — pense, por exemplo, em

$$x_1 = 1,0000000000000000 \quad \text{e} \quad x_2 = 1,0000000000000001.$$

Para praticamente qualquer instrumento de medida, eles serão o mesmo valor, pois será impossível mensurar — fisicamente, com uma trena ou régua — a diferença entre eles, que seria da ordem de um bilionésimo de um trilionésimo de metro (no caso de tais valores serem expressos em metro).

Mas, na verdade, ao aproximar infinitamente x_1 de x_2 , queremos que eles fiquem ainda mais próximos — bilhões de bilhões de vezes mais próximos do que o exemplo acima colocado. Ora, com isso, garantimos que x_1 é praticamente igual a x_2 , mas ainda mantendo $(x_2 - x_1) \neq 0$, a fim de que a manipulação algébrica anteriormente feita seja válida. Sendo assim, fazendo $x_1 \approx x_2 = x_0$ na Equação (2.8), ficamos com

$$45(x_0 + x_0) = 2(x_0^2 + x_0x_0 + x_0^2),$$

o que nos leva a $x_0 = 15$, que é o valor exato do lado da base quadrada do paralelepípedo que maximiza o volume. No caso, como a soma da altura, largura e profundidade tem que ser 45, vemos que tal sólido, na verdade, é um cubo de aresta 15 — este é o sólido que maximiza o volume.

O método é razoavelmente simples e, em tese, permite sempre achar o valor máximo ou mínimo de uma função — ponto para o qual x_1 e x_2 convergem e a reta secante se torna tangente. Em síntese, o processo feito para encontrar o máximo ou mínimo de uma função $f(x)$ consiste nos seguintes passos:

1. Escolha dois valores x_1 e x_2 , mantendo sempre $x_1 \neq x_2$, mas com $f(x_1) = f(x_2)$.
2. Faça x_1 ficar infinitamente próximo de x_2 — tão próximo quanto se queira — mas sempre mantendo $x_1 \neq x_2$. Isso garante que nunca teremos $(x_2 - x_1) = 0$, por mais que tal valor seja tão próximo de zero quanto se queira. Isso permite que, nas manipulações algébricas feitas, sempre seja possível dividir qualquer termo por $(x_2 - x_1)$ — nunca estaremos dividindo por zero.
3. Após fazer as manipulações algébricas, como x_1 e x_2 são praticamente o mesmo valor, pode-se obter o valor de x que maximiza ou minimiza a função $f(x)$, fazendo $x_1 \approx x_2$, uma vez que estes dois valores estarão convergindo para o x que dá o máximo (ou o mínimo) da função.

É natural que este método levante algumas dúvidas, principalmente por conta do mesmo ente que aparece aqui como elemento central do processo: o infinito. Fazer dois termos se aproximarem infinitamente de modo que eles sejam praticamente o mesmo, mas a sua diferença — apesar de ser a coisa mais próxima de zero que se pode imaginar — não seja nula. Como assim x_1 é diferente x_2 para usarmos o fato de que $(x_2 - x_1) \neq 0$, mas, no final, podemos fazer com que $x_1 = x_2$ para obter a resposta exata?

Não seria esse processo apenas uma excelente aproximação? Se essas dúvidas lhe surgirem, caro leitor, trabalhe para se sentir confortável com elas. Essa é a grande

novidade do Cálculo — a qual iremos detalhar e nos aprofundar mais em breve —, mas saiba que, ao longo dessa travessia, o infinito sempre aparecerá mordendo nosso calcanhar.

Aplicando ao vértice de uma parábola

A fim de nos familiarizarmos com o método e percebermos como ele pode ser absolutamente preciso — e não apenas uma boa aproximação —, vamos aplicar o raciocínio de Fermat a um problema certamente conhecido pelo leitor: a localização do vértice de uma parábola.

Seja uma parábola descrita por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Inicialmente escolha dois valores distintos de x , digamos x_1 e x_2 , tais que $f(x_1) = f(x_2)$, ou seja, os dois valores **distintos** de x possuem o mesmo y associado a eles. Isso sempre é possível, exceto quando tal valor de x for o *xis do vértice*. Uma breve análise da Figura 2.18 certamente convencerá o leitor de tal fato.

A ideia consiste em começar com valores distintos de x_1 e x_2 mas ir aproximando-os um do outro, sempre mantendo $f(x_1) = f(x_2)$, como mostra a Figura 2.18.

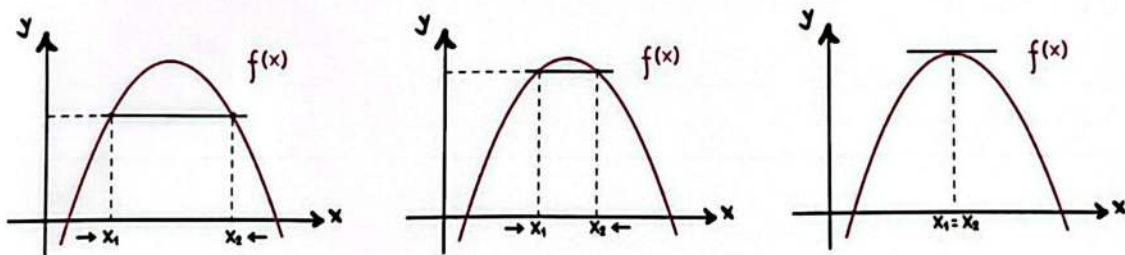


Figura 2.18: Ideia que roubei de Pierre de Fermat.

No limite em que x_1 for *praticamente* igual a x_2 , estaremos exatamente no topo da parábola, que é o ponto que desejamos encontrar. Pela equação da função da parábola, tem-se:

$$f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c$$

$$f(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c.$$

Como $f(x_1) = f(x_2)$, tem-se, ainda:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = ax_2^2 + bx_2 + c$$

$$ax_1^2 - ax_2^2 = -bx_1 + bx_2.$$

Usando o produto notável da diferença de quadrados, ficamos com:

$$a(x_1^2 - x_2^2) = -b(x_1 - x_2)$$

$$a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = -b(x_1 - x_2),$$

de onde tiramos, dividindo os dois lados por $(x_1 - x_2)$, o que pode ser feito, uma vez que assumimos $x_1 \neq x_2$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Contudo, como no nosso limite teremos $x_1 \approx x_2 = x_V$, o lado esquerdo da equação acima se reduz a

$$x_1 + x_2 = x_V + x_V = 2x_V,$$

de onde tiramos que

$$x_V = -\frac{b}{2a}, \quad (2.9)$$

que é a conhecida expressão para a abscissa do vértice de uma parábola.

O leitor sabe que a equação encontrada acima não é uma aproximação, ela é exata e já conhecida por ele. Isso mostra algumas sutilezas de se trabalhar com o infinito — grandezas infinitamente pequenas, a dizer, o termo $(x_1 - x_2)$, neste exemplo. Ao brincar com o infinito, **aproximações** infinitamente boas podem nos levar a resultados **exatos**.

Exemplo 2.1

Encontre uma expressão geral que possibilite encontrar os máximos/mínimos da função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Para buscar um máximo ou mínimo, queremos buscar pontos em que a reta tangente à curva é horizontal. Para isso, escolhemos primeiramente x_1 e x_2 com $x_1 \neq x_2$ e tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Disso, tem-se:

$$ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d$$

de onde escrevemos:

$$\begin{aligned} a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) &= 0 \\ a(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + c(x_1 - x_2) &= 0, \end{aligned}$$

em que usamos o produto notável de diferença de cubos e quadrados na última linha. Sendo $x_1 \neq x_2$, podemos dividir os dois lados da última equação por $(x_1 - x_2)$, o que nos leva a

$$a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + c = 0.$$

Fazendo agora x_1 se aproximar de x_2 de tal modo que eles convirjam praticamente para um único ponto, tal ponto será o nosso vértice. Façamos, portanto, $x_1 \approx x_2 = x_V$. Logo, na equação anterior, teremos:

$$a(3x_V^2) + b(2x_V) + c = 0,$$

ou seja, os pontos x_V de máximo e mínimo são dados pelas duas soluções da equação

$$3ax_V^2 + 2bx_V + c = 0,$$

o que nos mostra que uma função do terceiro grau pode ter 0, 1 ou 2 pontos de máximo/mínimo, que são as soluções da equação quadrática acima.

Tudo indica que esse método realmente é infalível: já fizemos para polinômios de grau 2 e 3 e é possível, usando fatoração, aplicar para o caso geral de um polinômio de grau n e obter uma equação algébrica que forneça os máximos e mínimos de tal polinômio. Seria possível, ainda, aplicar esse método para outras funções, que não as polinomiais?

Exemplo 2.2

Mostre, usando o raciocínio de Fermat, que o primeiro máximo da função $f(x) = \sin(x)$ ocorre em $x = \pi/2$.

Façamos o procedimento padrão: escolhe-se x_1 e x_2 com $x_1 \neq x_2$ e tal que $f(x_1) = f(x_2)$. A fim de tornar mais claros alguns passos do cálculo, façamos $x_2 = x_1 + \Delta x$. O que iremos fazer, no passo final, é Δx ser praticamente zero, de modo que $x_1 \approx x_2$. Como $f(x_1) = f(x_2)$, tem-se:

$$\begin{aligned}\sin(x_1) &= \sin(x_1 + \Delta x) \\ \sin(x_1) &= \sin(x_1) \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x) \cos(x_1).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Queremos que Δx seja tão pequeno que quase se anule. Sendo Δx muito próximo de zero, numa primeira aproximação, poderíamos dizer que seu seno será praticamente zero e seu cosseno praticamente igual a 1. Contudo, colocando esses valores na equação anterior, ficaríamos com a identidade $\sin(x_1) = \sin(x_1)$, o que não nos leva aonde queremos.

Façamos, então, uma aproximação de segunda ordem. Para ângulos pequenos, podemos fazer que $\sin(\Delta x) \approx \Delta x$, sendo o ângulo em radianos. Posto isso, usando a Relação Fundamental da Trigonometria, teremos:

$$\cos(\Delta x) = \left(1 - (\Delta x)^2\right)^{1/2},$$

e, usando a aproximação binomial $(1+x)^n \approx 1+nx$ para $x \ll 1$, ficamos com

$$\cos(\Delta x) \approx 1 - \frac{1}{2}(\Delta x)^2,$$

que, pela Equação (2.10), leva-nos a

$$(\Delta x) \cos(x_1) - \frac{1}{2} \sin(x_1)(\Delta x)^2 = 0,$$

ou seja:

$$\cos(x_1) = \frac{1}{2} \sin(x_1)(\Delta x).$$

Agora, fazendo Δx ir pra zero, vemos que o lado direito da equação zera, ou seja, os pontos x_1 de máximo ou mínimo serão aqueles para os quais $\cos(x_1) = 0$, exatamente quando temos $\sin(x_1) = \pm 1$, o que ocorre sempre quando $x_1 = k\pi/2$ com $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$, ocorrendo pela primeira vez em $x_1 = \pi/2$ quando $k = 1$.

2.2.2 O problema da reta tangente

O problema mais geral — que é o problema central do Cálculo Diferencial — é o de encontrar a reta que tangencia uma curva $f(x)$ em qualquer ponto, e não apenas em um ponto de máximo ou mínimo, no qual a tangente é horizontal.

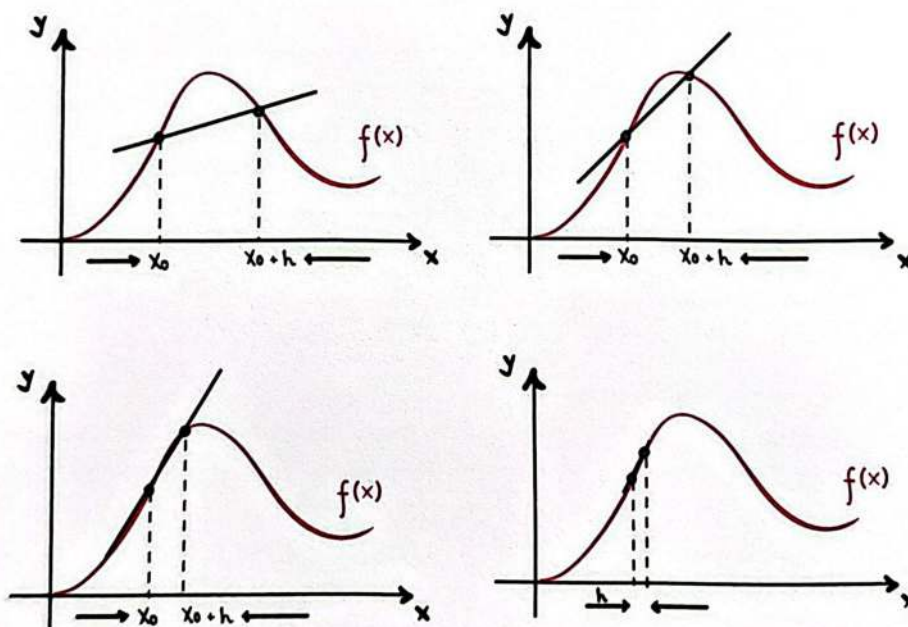


Figura 2.19: A secante que se torna uma tangente quando h tende a zero.

Digamos que o objetivo seja encontrar o coeficiente angular da reta que tangencia o gráfico da função $f(x)$ no ponto em que $x = x_0$, ou seja, no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Escolhendo um outro ponto $x_1 = x_0 + h$, onde $f(x_1) = f(x_0 + h)$, podemos aproximar a reta tangente em x_0 pela secante que passa pelos pontos x_0 e $x_0 + h$, como mostra a primeira imagem da Figura 2.19.

Dados dois pontos, podemos obter o coeficiente angular m da reta que os corta pela conhecida fórmula da Geometria Analítica:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (2.11)$$

Como mostram as demais imagens da Figura 2.19, a aproximação ficará tão melhor quanto mais próximos forem os pontos x_0 e $x_0 + h$, exatamente como feito por Fermat. À medida que h se aproximar de zero, os dois pontos ficarão infinitamente próximos, de tal maneira que, *no limite em que h for praticamente igual a zero*, os dois pontos se tornarão praticamente um, e a secante se tornará uma tangente. Temos, portanto, um meio de obter a reta tangente à função $f(x)$ em qualquer ponto x_0 de seu domínio usando as ideias de Fermat — e este é o problema central do Cálculo Diferencial: o cálculo da derivada, que é justamente o coeficiente angular da reta que tangencia uma certa curva num certo ponto.

Mais uma vez, podem surgir as dúvidas devido ao infinito: se h precisa ser zero para que a aproximação seja exata, parece ser impossível dar cabo em tal tarefa, uma vez que teríamos uma divisão por zero na Equação (2.11). Mas lembre-se: não estaremos dividindo por zero. Será quase isso — o mais próximo disso que se possa imaginar —, e o coração do método mora nisso.

Mas por que alguém teria interesse em calcular coeficientes angulares de retas tangentes? Calcular áreas — o Cálculo Integral — parece bem razoável, mas calcular inclinações de retas que tangenciam curvas parece abstrato demais. Bem, já mostramos um exemplo bem prático e interessante no campo da Geometria, que foi resolvido por Fermat. Qualquer problema de maximizar ou minimizar alguma função pode ser resolvido por meio dessas técnicas, e só esses tipos de problemas possuem uma vasta aplicabilidade.

Para ilustrar ao menos uma outra, considere a função $S(t)$ que fornece a posição de uma partícula em termos do tempo t . Dados dois instantes t_1 e t_2 , é possível calcular a velocidade média v_m da partícula no intervalo $(t_2 - t_1)$ por meio da definição

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Ocorre que, geometricamente, isso é exatamente o coeficiente angular da reta secante à curva $S(t)$ entre os pontos t_1 e t_2 , ou seja, a $\tan(\theta)$ na Figura 2.20.

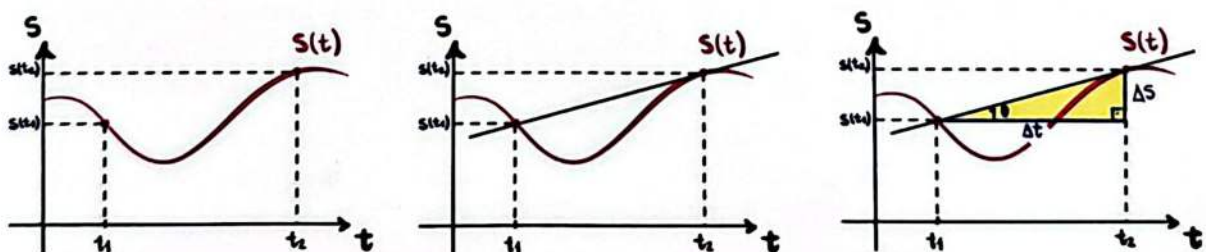


Figura 2.20: A velocidade média no gráfico $S(t)$.

Ora, dito isso, se fizermos o intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ tender a zero, aproximando t_2 de t_1 , tenderemos a ter uma velocidade média cada vez mais próxima da velocidade exata — a velocidade instantânea — do objeto no instante t_1 . No limite em que t_2 tende a t_1 a reta secante se aproxima da tangente em $t = t_1$, e o coeficiente angular calculado se aproxima do valor da velocidade instantânea do objeto em t_1 . Essa é

uma aplicação clássica do Cálculo Diferencial — as derivadas — na Cinemática, área da Física que estuda o movimento dos corpos. A derivada da posição em relação ao tempo é a velocidade, é o que um físico diria.

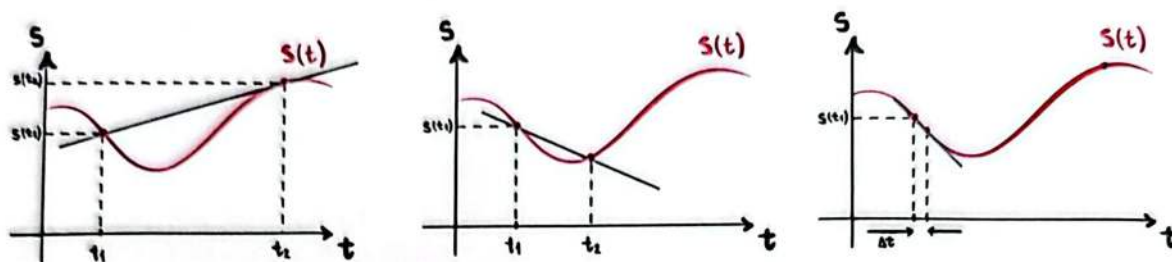


Figura 2.21: A velocidade média se tornando instantânea quando $t_2 \rightarrow t_1$.

Você, contudo, pode falar com mais elegância e de algumas formas diferentes:

- Quando o intervalo de tempo tende a zero, o cálculo da velocidade média tende ao valor da velocidade instantânea da partícula.
- Quando o intervalo de tempo tende a zero, a reta secante no gráfico $S(t)$ se aproxima da tangente, convergindo exatamente para ela.

Espero que tenha ficado um pouco mais claro o quão rico e abrangente pode se tornar o estudo de retas que tangenciam curvas quaisquer.

2.3 O cálculo infinitesimal: Limites

2.3.1 Os infinitesimais

Chegamos aqui ao coração do que faz os nossos cálculos funcionarem, sejam os cálculos de áreas ou de inclinações de retas tangentes: o cálculo dos infinitesimais. Em tudo que computamos até aqui, a parte central sempre exigiu que fizéssemos uma

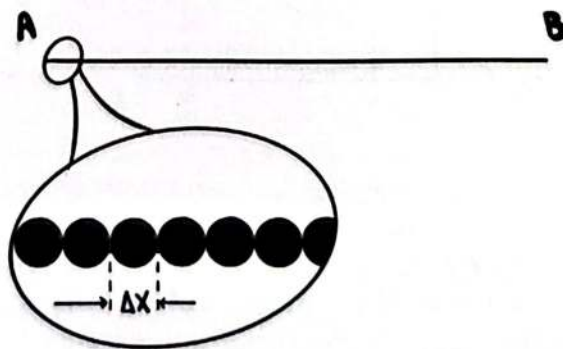


Figura 2.22: Os infinitesimais.

grandeza se tornar infinitamente pequena, que um número se aproximasse infinitamente do outro, que somássemos infinitos pedaços de área, todos eles infinitamente pequenos. Sempre problemas envolvendo o infinito e os chamados *infinitesimais*.

Geometricamente falando, os infinitesimais seriam a menor porção que compõe uma reta, por exemplo. Uma espécie de átomo matemático, a menor porção na qual se pode dividir alguma coisa. Sua concepção remonta à Grécia Antiga, há mais de 2 mil anos. Durante muito tempo, houve discussões acirradas a respeito da sua existência — inclusive uma muito dura no século XVII, durante a invenção do Cálculo Integral e Diferencial, protagonizada por Leibniz e Newton.

A discussão se justifica. Afinal de contas, o que seriam esses infinitesimais? Ora, se pudermos pegar um segmento de reta e dividi-lo até não conseguirmos mais, o que sobraría seria o infinitesimal. A reta seria, portanto, composta por eles.

Ora, mas sendo assim, surgem, de imediato, alguns questionamentos:

1. Qual é o tamanho Δx desses infinitesimais?

Qualquer que seja o número que você me disser, eu posso simplesmente dividi-lo por 2 e partir o infinitesimal pela metade. Desse modo, ele deixa de ser indivisível, pois sempre existem porções menores do que ele, o que contraria nossa hipótese.

Alguém poderia dizer que ele teria tamanho zero. Mas, nesse caso, se fôssemos somar todos os infinitesimais colocados lado a lado para constituir nosso segmento de reta, como na Figura 2.22, seu tamanho seria $0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0$, pois é: zero. Assim, todo segmento de reta teria tamanho nulo, o que também não faz sentido.

2. Outra indagação que surge naturalmente é: quantos infinitesimais compõem uma reta? Ora, se fossem infinitos, somar infinitos pedaços de tamanho não nulo resultaria em um segmento de reta de tamanho infinito. Se forem finitos, significa que poderíamos subdividi-los ainda mais, e o infinitesimal novamente deixa de ser a menor porção da reta para ser apenas um pedaço qualquer — ainda que muito pequeno.

Veja que não é nada simples — e o coração do problema mora justamente no infinito, em somar infinitos pedaços, em fazer as coisas se tornarem infinitamente pequenas. Diversos paradoxos surgiram para mostrar algumas aparentes contradições em lidar com o infinito, talvez os mais famosos sendo aqueles propostos pelo filósofo Zenão de Eleia — que remontam ao século IV a.C. — como o Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga ou o Paradoxo da Flecha.

Prefiro trazer, portanto, uma outra digressão sobre o infinito — mais moderna, inclusive. Ela é do início do século XVII, ainda antes da invenção das técnicas do Cálculo Integral e Diferencial, e foi colocada por Galileu em seu livro *Dois novas ciências*.

Salviati: Esta é uma das dificuldades que surgem quando tentamos, com nossas mentes finitas, discutir o infinito, atribuindo-lhe as propriedades

que damos ao finito e ao limitado; mas penso que isso está errado, pois não podemos falar de quantidades infinitas como sendo uma maior, menor ou igual a outra. Para provar isso, tenho em mente um argumento que, para maior clareza, colocarei na forma de perguntas a Simplicio, que levantou essa dificuldade. Presumo que você saiba quais números são quadrados e quais não são.

Simplicio: Sei bem que um número quadrado é aquele que resulta da multiplicação de outro número por ele mesmo; assim, 4, 9, etc., são números quadrados que vêm da multiplicação de 2, 3, etc., por eles mesmos.

Salviati: Muito bem; e você também sabe que, assim como os produtos são chamados de quadrados, os fatores são chamados de lados ou raízes; enquanto, por outro lado, aqueles números que não consistem do produto de dois fatores iguais não são quadrados. Portanto, se eu afirmar que todos os números, incluindo quadrados e não quadrados, são maiores do que os quadrados acima, estarei dizendo a verdade, não estarei?

Simplicio: Com certeza.

Salviati: Se eu perguntar quantos quadrados existem, pode-se responder com verdade que há tantos quadrados quanto números correspondentes de raízes, já que todo quadrado tem sua própria raiz e toda raiz tem seu próprio quadrado, enquanto nenhum quadrado tem mais de uma raiz e nenhuma raiz tem mais de um quadrado.

Simplicio: Exatamente.

Salviati: Mas se eu perguntar quantas raízes existem, não se pode negar que há tantas quanto há números, pois todo número é uma raiz de algum quadrado. Sendo isso aceito, devemos dizer que há tantos quadrados quanto números, porque eles são igualmente numerosos que suas raízes, e todos os números são raízes. No entanto, no início, dissemos que há muitos mais números do que quadrados, já que a maior parte deles não são quadrados. Não só isso, mas o número proporcional de quadrados diminui à medida que avançamos para números maiores. Assim, até 100, temos dez, ou seja, os quadrados constituem um décimo de todos os números; até 10.000, encontramos apenas uma centésima parte como quadrados, e até um milhão, apenas uma milésima parte; e, ainda assim, por outro lado, em um número infinito, se alguém pudesse conceber tal coisa, seria forçado a admitir que há tantos quadrados quanto números, todos tomados juntos.

Sagredo: Então, o que se deve concluir em tais circunstâncias?

Salviati: Pelo que vejo, só podemos inferir que o número de quadrados é

infinito e o número de suas raízes é infinito; nenhum deles é menor que a totalidade de todos os números, nem o total de números é maior que o número de quadrados; e, finalmente, os atributos “igual”, “maior” e “menor” não se aplicam ao infinito, mas apenas a quantidades finitas. Quando, portanto, Simplicio introduz várias linhas de comprimentos diferentes e pergunta como é possível que as mais longas não contenham mais pontos do que as mais curtas, eu lhe respondo que uma linha não contém mais, nem menos, nem o mesmo número de pontos que outra, mas que cada linha contém um número infinito.

Acredito que o texto tenha esclarecido ao leitor como é delicado o território em que estamos pisando: os mistérios do infinito. Lidar com isso deu nó na cabeça de diversos matemáticos e cientistas — todos eles possivelmente (e provavelmente) mais inteligentes do que o leitor e também deste que vos escreve. Portanto, é importante que o leitor aprenda a ficar confortável no desconforto que será trabalhar com essas grandezas, afinal de contas, elas são o cerne de tudo o que será construído nesse livro.

2.3.2 O cálculo de limites

Voltemos à Figura 2.5 e ao cálculo da área do círculo que lá foi feito. Usamos, de forma intuitiva, o fato de que a área do círculo, *no limite em que o número de triângulos tende ao infinito*, torna-se igual à área varrida pelos triângulos.

Nosso argumento foi que a Equação (2.3), que ali havíamos colocado como uma aproximação, tornar-se-ia uma igualdade para n muito grande. Matematicamente, escreveríamos essa relação da seguinte forma:

$$A_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right). \quad (2.12)$$

O que essa notação quer dizer é que a aproximação que havíamos feito se torna uma igualdade para um número infinitamente grande de triângulos cobrindo o círculo. Essa expressão deve ser lida da seguinte forma:

O valor de A_C é igual ao limite, quando n tende ao infinito, de $\frac{n}{2} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Essa nova expressão é o que nos permitirá fazer cálculos com elementos que precisam se aproximar infinitamente uns dos outros, com números que precisam ser infinitamente próximos de zero etc. Perceba que isso ocorre não apenas no cálculo de áreas. Algo semelhante ocorreu quando calculamos inclinações de retas tangentes.

Na demonstração da Equação (2.9) afirmamos que $x_1 + x_2 \approx 2x_V$. O argumento era que à medida que x_1 e x_2 se aproximavam um do outro, *no limite em que eles estivessem infinitamente próximos*, eles iriam convergir e se encontrar no vértice. O que estamos dizendo é que a soma de dois números, a dizer x_1 e x_2 , quando cada um deles se aproxima infinitamente do número x_V , irá convergir, naturalmente, para o valor $x_V + x_V$. Podemos escrever isso matematicamente como

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow x_V} (x_1 + x_2) = x_V + x_V = 2x_V.$$

A expressão acima deve ser lida da seguinte forma:

O valor da soma $x_1 + x_2$, à medida que x_1 e x_2 tendem a x_V , é igual a $x_V + x_V$.

Volte, agora, à Figura 2.18 para entendermos o que essa nova operação significa. Suponha, de forma arbitrária, que o vértice da parábola esteja localizado em $x_V = 3$. Digamos que inicialmente nossa escolha foi $x_1 = 1,5$ e $x_2 = 5,0$. Quando fazemos x_1 se aproximar de x_2 , mantendo $f(x_1) = f(x_2)$, estamos fazendo esses dois pontos se aproximarem do vértice, como indicam as imagens 2 e 3 da Figura 2.18. Ora, à medida que x_1 e x_2 se aproximam infinitamente de x_V , o que acontece com a soma $(x_1 + x_2)$?

x_1	x_2	$x_1 + x_2$
1,5	5,0	6,5
2,0	4,3	6,3
2,5	3,6	6,1
2,9	3,2	6,1
2,99	3,011	6,001
2,999	3,001	6,0001
2,9999	3,00011	6,00001
2,99999	3,000011	6,000001
2,999999	3,0000011	6,0000001

Tabela 2.1: Valores de $x_1 + x_2$ à medida em que cada termo se aproxima de $x_V = 3$.

Como é evidente, à medida que x_1 e x_2 se aproximam de 3, a terceira coluna da tabela acima mostra que a soma $(x_1 + x_2)$ fica cada vez mais próxima de 6, que é o valor de $x_V + x_V$. No limite em que esses dois valores estiverem infinitamente próximos de x_V , a soma $(x_1 + x_2)$ estará infinitamente próxima de 6. Ou, se você preferir, podemos deixar a soma $(x_1 + x_2)$ tão próxima de 6 quanto quisermos. Para isso, basta aproximar x_1 e x_2 suficientemente bem do vértice $x_V = 3$.

É de extrema importância que o leitor olhe com atenção para a Figura 2.18 e para a tabela anterior e certifique-se de que compreendeu com profundidade a natureza do procedimento que foi apresentado, tanto algébrica quanto geometricamente. O exemplo escolhido para ilustrar o conceito foi propositalmente simples, a fim de que fique claro o cerne do processo que está sendo realizado.

Ainda sobre o cálculo de retas tangente, voltando à Equação (2.11), podemos dizer que a expressão exata para o coeficiente angular da reta que tangencia a curva $f(x)$ no ponto $x = x_0$ é dada por:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (2.13)$$

O que essa expressão quer dizer é que, como deixa claro a Figura 2.19, no limite que h fica infinitamente próximo de zero, a nossa reta secante passando pelos pontos

x_0 e $(x_0 + h)$ fica infinitamente próxima da reta tangente à curva no ponto $x = x_0$, que é o que buscamos.

Essa notação — $\lim_{h \rightarrow 0}$ — constitui uma nova operação matemática, na qual nos debruçaremos a partir de agora, pois ela é o intermédio que possibilita fazer os cálculos que queremos: de áreas e de inclinações de retas. Tal operação possibilita entender o que acontece com uma expressão algébrica quando uma grandeza fica infinitamente próxima de zero, ou quando se aproxima infinitamente de algum outro valor, e, como já ficou claro, esse é o procedimento central — e também o mais estranho — para o cálculo de áreas e de inclinações de retas tangente. É o estudo dos limites que nos permitirá entender em detalhes por qual razão podemos cancelar o termo $(x_2 - x_1)$ na Equação (2.7) e depois podemos usar que $x_1 = x_2$ logo em sequência — e por que isso dá um resultado exato.

Como dito, o Cálculo Integral e Diferencial foi desenvolvido formalmente de forma independente pelo alemão Gottfried Leibniz e pelo inglês Sir Isaac Newton no século XVII. As suas origens, contudo, remontam aos gregos, muitos séculos atrás, com o cálculo de áreas, posteriormente com o cálculo de inclinações de retas tangentes e, por fim, como ficou claro para o leitor, com a formalização e o cálculo de limites, posto que eles são a ferramenta principal para os cálculos que desejamos realizar.

Agora que a ordem histórica do surgimento das ideias foi devidamente apresentada ao leitor, estamos prontos para seguir pela ordem tradicional do estudo dos conceitos. Começaremos nos debruçando sobre o cálculo de limites pela justa razão que, como vimos, eles se mostraram ser o cerne dos cálculos que precisamos fazer.

2.4 Problemas

Seção 2.1 – O cálculo de áreas: Cálculo Integral

Problema 2.1 (*O Método da Exaustão*). Encontre a expressão para a área de um polígono de n lados inscrito e outro circunscrito a uma circunferência de raio R . Obtenha a expressão para a área do círculo fazendo n tender ao infinito.

Seção 2.2 – O cálculo de retas tangente: Cálculo Diferencial

Problema 2.2 (*Fermat para quarto grau*). Encontre a expressão que fornece o(s) ponto(s) em que a reta tangente à curva $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ é horizontal.

Problema 2.3 (*Generalização de Fermat*). Encontre a expressão que fornece o(s) ponto(s) em que a reta tangente à curva $f(x) = x^n$ é horizontal.

Problema 2.4 (*Derivando por definição*). Encontre o coeficiente angular da reta que tangencia a parábola $f(x) = x^2$ em $x = 1$.

Problema 2.5 (*Derivando por definição mais uma vez*). Encontre o coeficiente angular da reta que tangencia a parábola $f(x) = x^2$ em $x = 2$.

Problema 2.6 (*Derivando por definição: generalização*). Encontre uma expressão $m(x)$ que forneça o coeficiente angular da reta que tangencia a parábola $f(x) = x^2$ para qualquer ponto x .

Problema 2.7 (*Derivando por definição a função cúbica*). Qual é o coeficiente angular da reta que tangencia a função $f(x) = x^3$ em $x = 0$? E em $x = 2$?

Problema 2.8 (*Derivada polinomial: quártica*). Encontre uma expressão geral que forneça o coeficiente angular da reta que tangencia a função $f(x) = x^4$ em um ponto x qualquer.

Problema 2.9 (*Derivada polinomial: generalização*). Encontre uma expressão geral que forneça os máximos/mínimos da função $f(x) = x^n$.

Seção 2.3 – O cálculo infinitesimal: Limites

Problema 2.10 (*Estimando limites*). Estime quanto vale $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x}$.

2.5 Exercícios

Seção 2.2 – O cálculo de retas tangente: Cálculo Diferencial

Exercício 2.11 (*Fermat e a função quadrática*). Localize o vértice da função $f(x) = x^2 - 4x + 2$, utilizando a técnica de Fermat.

Exercício 2.12 (*Fermat e a função cúbica*). Localize o(s) vértice(s) da função $f(x) = x^3 + 5x^2 - 6x + 2$, utilizando a técnica de Fermat.

Exercício 2.13 (*Derivada trigonométrica por definição*). Encontre todos os máximos da função $f(x) = \cos(x)$.

2.6 Resoluções dos Problemas

Seção 2.1 – O cálculo de áreas: Cálculo Integral

Problema 2.1

Essa é a forma tradicional do Método da Exaustão de Eudoxo. Começamos avaliando uma expressão para a área do polígono circunscrito à circunferência de raio R .

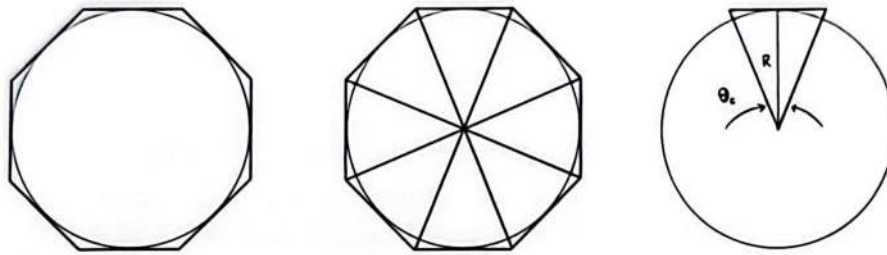


Figura 2.23: Polígono circunscrito à circunferência.

A Figura 2.23 mostra o caso inicialmente para um hexágono regular. O cálculo da área do polígono que faremos consistirá em dividi-lo em triângulos e, para um polígono regular de n lados, iremos varrê-lo por n triângulos como os da terceira imagem da Figura 2.23, cuja área será, naturalmente,

$$A_{TC} = R^2 \tan\left(\frac{\theta_C}{2}\right).$$

A notação A_{TC} denota a área do triângulo referente ao polígono circunscrito à circunferência. O mesmo vale para o índice C em θ_C . Ora, tal ângulo vale

$$\theta_C = \frac{2\pi}{n},$$

de modo que a área A_C do polígono circunscrito de n lados fica sendo

$$A_C = nA_{TC} = nR^2 \tan\left(\frac{\theta_C}{2}\right) = nR^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (2.14)$$

Caso o leitor queira, poderíamos utilizar a Equação (2.14) e fazer um procedimento análogo ao que fizemos ao longo do texto no cálculo da área do círculo por meio do polígono inscrito. Isto é, dizemos que a área do polígono circunscrito tende à área do círculo quando $n \rightarrow \infty$, isto é, denotando por A_O a área do círculo, tem-se:

$$A_O = \lim_{n \rightarrow \infty} A_C = \lim_{n \rightarrow \infty} nR^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Ora, mas com n tendendo ao infinito, o argumento da tangente fica muito próximo de zero, e, para ângulos pequenos, vale que $\theta \approx \tan(\theta)$, de modo que teremos

$$A_O = \lim_{n \rightarrow \infty} nR^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = nR^2 \frac{\pi}{n} = \pi R^2,$$

que é a conhecida fórmula da área do círculo, como esperávamos.

Essa não era, contudo, nossa intenção inicial. O objetivo é sanduichar a área do círculo entre as áreas dos polígonos que o circunscreve e aquele que o inscreve.

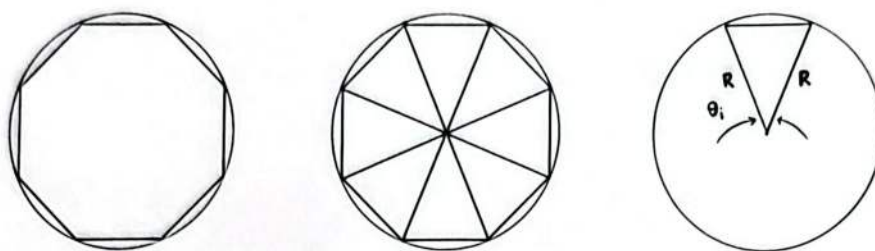


Figura 2.24: Polígono inscrito à circunferência.

A Figura 2.24 mostra o caso inicialmente para um hexágono regular inscrito à circunferência. O cálculo da área do polígono que faremos consistirá em dividi-lo em triângulos e, para um polígono regular de n lados, iremos varrê-lo por n triângulos, como os da terceira imagem da Figura 2.24. Tal cálculo já foi feito ao longo do texto, e a área A_I do polígono de n lados inscrito à circunferência de raio R é dada pela Equação (2.3):

$$A_I = \frac{n}{2} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right). \quad (2.15)$$

Note que, ao longo da teoria, a Equação (2.3) aparece como uma aproximação pelo fato que estamos dizendo que a área do polígono é aproximadamente igual à do círculo. Agora, no nosso estudo, estamos avaliando apenas a área do polígono inscrito, de modo que a Equação (2.15) é uma igualdade e não uma aproximação.

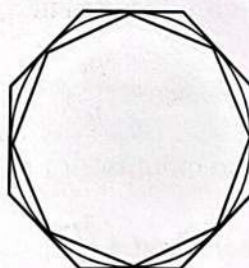


Figura 2.25: A área do círculo é limitada inferior e superiormente pelos respectivos polígonos inscrito e circunscrito.

Ora, estando a circunferência aprisionada entre os polígonos inscrito e circunscrito, como mostra a Figura 2.25 para o caso $n = 6$, sua área A_O irá satisfazer a desigualdade

$$A_I \leq A_O \leq A_C.$$

Usando as Equações (2.14) e (2.15), podemos escrever a desigualdade como

$$\frac{n}{2} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \leq A_O \leq n R^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

de modo que, para diferentes valores de n , é possível ir estreitando e obtendo uma aproximação tão boa quanto se queira para a área do círculo. Para $n = 12$, um dodecágono inscrito e outro circunscrito à circunferência, a desigualdade seria

$$3R^2 \leq A_O \leq 3,21R^2.$$

Para $n = 24$, teríamos

$$3,1058R^2 \leq A_O \leq 3,1596R^2.$$

Para $n = 48$, teríamos

$$3,1326R^2 \leq A_O \leq 3,1460R^2.$$

Para $n = 1000$, teríamos

$$3,141571R^2 \leq A_O \leq 3,141602R^2.$$

A última desigualdade nos possibilitaria extrair uma boa aproximação para a área do círculo, sendo ela $A_O \approx 3,14R^2$. Note que, sabendo que a área do círculo é proporcional ao quadrado do seu raio, podemos dividir todas as desigualdades acima por R^2 e teremos aproximações para o valor de π .

Esse foi o cálculo desenvolvido por Eudoxo no século V a.C., e o nome Método da Exaustão advém do fato que, diferente do que foi feito por mim, quando eu apenas lancei diferentes valores de n num software que me forneceu os resultados que escrevi, os gregos, desguarnecidos de máquinas de calcular e computadores, faziam esses cálculos na mão, de modo que, quanto melhor fosse a aproximação que eles buscassem, mais braço eles precisariam ter para fazer os cálculos e obter um melhor resultado.

Em homenagem aos gregos que devem ter gastado incontáveis papiros para nos entregar a área do círculo e boas aproximações para o valor de π , deixo aqui uma última desigualdade, para o caso $n = 1.000.000.000$, o qual certamente seria impossível para Eudoxo calcular na mão.

$$3,141592653569 \leq \pi \leq 3,141592653589.$$

Vida longa aos gregos!

Seção 2.2 – O cálculo de retas tangente: Cálculo Diferencial

Problema 2.2

Sejam x_1 e x_2 com $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$. Logo:

$$ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e = ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e.$$

Agrupando termos de mesma potência, temos

$$a(x_1^4 - x_2^4) + b(x_1^3 - x_2^3) + c(x_1^2 - x_2^2) + d(x_1 - x_2) = 0,$$

e, aplicando diferença de quadrados, de cubos, e de quadrados duplamente no primeiro termo, ter-se-á

$$\begin{aligned} a(x_1^2 + x_2^2)(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + b(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + \\ + c(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + d(x_1 - x_2) = 0. \end{aligned}$$

Dividindo os dois lados por $(x_1 - x_2)$ — o que pode ser feito, posto que $x_1 \neq x_2$ —, ficamos com

$$a(x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2) + b(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + c(x_1 + x_2) + d = 0.$$

Tomando agora, dos dois lados, o limite quando $x_1 \rightarrow x_2$, chegaremos ao ponto em que $x_1 \approx x_2 = x_V$, com a reta horizontal secante aos pontos x_1 e x_2 tornando-se tangente ao ponto x_V , no qual eles coincidem, ou seja, este marca o(s) ponto(s) em que a reta tangente à função $f(x)$ é horizontal. Fazendo $x_1 = x_2 = x_V$ na equação acima, teremos

$$4ax_V^3 + 3bx_V^2 + 2cx_V + d = 0.$$

Tal é a condição que fornece os pontos x_V nos quais a reta que tangencia a função $f(x)$ do quarto grau é horizontal. Note que, de uma equação do quarto grau, caímos em uma do terceiro grau, de modo que, a princípio, existem 3 pontos x_V nos quais a reta tangente à função de grau 4 é horizontal. Perceba que o mesmo ocorreu quando fizemos a análise, no Exemplo 2.1, da função do terceiro grau: a condição para encontrar pontos em que a reta que a tangencia fosse horizontal se reduzia para uma equação quadrática, ou seja, um grau a menos que a função que a originou. Isso, de modo geral, sempre ocorre: uma função polinomial de grau n irá gerar uma equação de grau $(n - 1)$ que possibilitará obter, como solução, os pontos em que a reta que tangencia a função original é horizontal. O próximo problema evidenciará isso.

Problema 2.3

Sigamos o raciocínio tradicional de Fermat: sejam x_1 e x_2 com $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$. Logo, $x_1^n = x_2^n$, ou, subtraindo um termo dos dois lados, $x_1^n - x_2^n = 0$.

Usaremos aqui uma fatoração que é a generalização da diferença de quadrados ou de cubos, usada em exemplos anteriores:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

que, aplicado em $x_1^n - x_2^n = 0$, nos leva a:

$$x_1^n - x_2^n = (x_1 - x_2)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + x_1^{n-3}x_2^2 + \dots + x_1^2x_2^{n-3} + x_1x_2^{n-2} + x_2^{n-1}) = 0,$$

e, dividindo por $(x_1 - x_2)$ — perceba que é isso que faz com que o grau da equação caia por exatamente uma unidade — teremos:

$$x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + x_1^{n-3}x_2^2 + \dots + x_1^2x_2^{n-3} + x_1x_2^{n-2} + x_2^{n-1} = 0.$$

Ora, aqui é quando tomamos, dos dois lados, o limite em que $x_1 \rightarrow x_2$, que é o que, mantendo sempre $f(x_1) = f(x_2)$, faz com que a reta secante horizontal que corta os pontos x_1 e x_2 se torne tangente horizontal no ponto em que $x_1 = x_2 = x$. Logo, a equação acima se torna a soma de n termos iguais a x^{n-1} :

$$nx^{n-1} = 0, \tag{2.16}$$

e, como queríamos mostrar, a função $f(x) = x^n$ de grau n possui associada a si uma equação de grau $(n - 1)$ cujas soluções determinam os pontos em que a reta tangente à função é horizontal.

Naturalmente a solução da Equação (2.16) é trivial, sendo dada por $x = 0$ para qualquer n . Tal expressão, contudo, ajudará o leitor a conectar algumas ideias quando entrarmos em mais detalhes no estudo das derivadas.

Problema 2.4

Escolhemos $x_0 = 1$ como ponto fixo, no qual queremos encontrar o coeficiente angular da reta que tangencia a parábola. Seja a abscissa $x_1 = x_0 + h = 1 + h$. O coeficiente angular da reta que passa por esses dois pontos é dado pela Equação (2.11):

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}.$$

Avaliando na função, tem-se:

$$f(1) = 1^2 \quad \text{e} \quad f(1 + h) = (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2,$$

de modo que o coeficiente angular procurado é

$$m = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{(1 + 2h + h^2) - 1}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h}.$$

O que queremos é fazer h ser o valor mais próximo de zero possível para que o ponto $x_1 = x_0 + h$ esteja infinitamente próximo de x_0 , tão próximo a ponto de serem quase o mesmo ponto. Nesse caso, a equação acima fornecerá o valor exato do coeficiente angular da reta que tangencia a parábola em $x = 1$.

Com o valor de h tendendo a zero — mas nunca chegando exatamente nele —, podemos dividir o numerador e o denominador da equação acima por h , de modo que fiquemos com

$$m = h + 2,$$

mas, como h está tendendo a zero, a soma de 2 com o número mais próximo de zero que você puder imaginar vai resultar em... pois é: exatamente 2. Desse modo, o coeficiente angular da reta que procuramos vale 2. Caso o leitor já queira se familiarizar com uma linguagem mais formal, o que fizemos foi tomar o limite da expressão $(h + 2)$ quando $h \rightarrow 0$, ou seja:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h + 2) = 2.$$

Isso quer dizer que podemos deixar a expressão $(h + 2)$ tão próxima de 2 quanto quisermos; basta apenas deixar h suficientemente próximo de zero.

Problema 2.5

Esse problema é bem semelhante ao anterior, mudando o ponto em torno do qual faremos h tender a zero.

Façamos $x_0 = 2$ e seja a abscissa $x_1 = x_0 + h = 2 + h$. O coeficiente angular da reta que passa por esses dois pontos é dado pela Equação (2.11):

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}.$$

Avaliando na função, tem-se:

$$f(2) = 2^2 = 4 \quad \text{e} \quad f(2 + h) = (2 + h)^2 = 4 + 4h + h^2,$$

de modo que o coeficiente angular procurado é

$$m = \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{(4 + 4h + h^2) - 4}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4.$$

Com o valor de h tendendo a zero — mas nunca chegando exatamente nele —, a reta secante entre os pontos x_0 e x_1 se torna uma tangente em x_0 . Nesse caso, o coeficiente angular da reta tangente que procuramos será o valor da expressão acima avaliada *no limite em que h tende a zero*, ou seja, quando h for o número mais próximo de zero que pudermos imaginar. Escrevemos isso, matematicamente, da seguinte forma:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4,$$

em que o resultado de 4 somado com um número que vai pra zero é, naturalmente, 4.

Problema 2.6

A ideia aqui é generalizarmos os problemas anteriores. Queremos achar o coeficiente angular da reta que tangencia a parábola $f(x) = x^2$ em um ponto $x = x_0$ qualquer. Usando a Equação (2.11) já inserindo a notação de que a igualdade vale apenas no limite em que h vai para zero, nosso coeficiente angular será:

$$m(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tem-se $f(x_0) = x_0^2$ e $f(x_0 + h) = x_0^2 + 2x_0h + h^2$, donde:

$$m(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0^2 + 2x_0h + h^2) - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h),$$

em que, no último passo, dividimos o numerador e denominador por h , uma vez que $h \neq 0$ por mais que ele se aproxime infinitamente de zero.

Ora, para qual valor tende a soma de um número — a dizer, $2x_0$, com o número mais próximo de zero que você consegue imaginar — h , no caso? Exatamente: a soma tende ao próprio número. Temos, portanto,

$$m(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0.$$

É importante que fique claro para o leitor o que foi feito: a expressão acima é uma fórmula geral que permite encontrar o coeficiente angular m da reta que tangencia a parábola $f(x) = x^2$ em qualquer ponto $x = x_0$ da parábola. Por isso, a expressão final é, naturalmente, uma função de x_0 : $m(x_0) = 2x_0$. Vejamos se a nossa expressão encontrada funciona para os casos anteriores.

No primeiro problema, calculamos o coeficiente angular da reta que tangencia a parábola $f(x) = x^2$ em $x_0 = 1$. Aplicando a nossa expressão, obtemos:

$$m(1) = 2 \cdot 1 = 2,$$

que é justamente o valor que havíamos obtido.

No segundo problema, avaliamos o coeficiente angular da reta que tangencia a mesma função em $x_0 = 2$, que, na nossa expressão, seria:

$$m(2) = 2 \cdot 2 = 4,$$

exatamente como foi obtido.

Poderíamos avaliar outros pontos simples para averiguarmos a precisão dessa expressão, como, por exemplo, o conhecido fato de que o vértice da parábola $f(x) = x^2$ está na origem, ou seja, em $x_0 = 0$ a reta que tangencia a parábola é horizontal, sendo sua inclinação, portanto, nula. Vejamos:

$$m(0) = 2 \cdot 0 = 0,$$

concordando com o esperado.

A expressão $m(x)$, que futuramente será representada por $f'(x)$, é conhecida por função derivada de $f(x)$, ou a derivada de $f(x)$. O que quer dizer que, primeiramente, ela *deriva* de $f(x)$, no sentido que ela é obtida a partir da função $f(x)$, e ela fornece a derivada da função $f(x)$, ou seja, ela fornece o coeficiente angular da reta que tangencia a função $f(x)$ em qualquer ponto x .

Problema 2.7

Ora, o coeficiente angular da reta que tangencia a função $f(x) = x^3$ em um ponto x_0 qualquer é dado por

$$m(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ou seja:

$$m(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h}.$$

Como $(a + b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$, a expressão se reduz a

$$\begin{aligned} m(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2). \end{aligned}$$

No limite em que h tende a zero, os dois últimos termos da soma, multiplicados por h e h^2 , tornam-se infinitamente próximos de zero, de modo que apenas o primeiro termo permanece quando h estiver infinitamente próximo de zero. Ou seja:

$$m(x_0) = 3x_0^2.$$

Em particular, avaliando para $x_0 = 0$, vemos que o coeficiente angular da reta que tangencia a função $f(x) = x^3$ nesse ponto é $m(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$. Avaliando em $x_0 = 2$, vemos que o coeficiente angular da reta que tangencia a função cúbica nesse ponto é $m(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$.

Problema 2.8

Buscamos encontrar a função $m(x)$ dada por

$$m(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

com $f(x) = x^4$. Disso, tem-se $f(x+h) = (x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$. Logo:

$$\begin{aligned} m(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4) - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3), \end{aligned}$$

e, com h infinitamente próximo de zero, os três últimos termos se tornam desprezíveis, sobrando apenas o primeiro, isto é:

$$m(x) = 4x^3$$

é a função que fornece o coeficiente angular da reta que tangencia a função $f(x) = x^4$ em qualquer ponto x .

Problema 2.9

Esse problema é uma generalização dos anteriores. Queremos encontrar uma expressão geral que forneça, para cada x , o coeficiente angular da reta que tangencia a função $f(x) = x^n$.

Tal expressão, como sabemos, é obtida pelo limite

$$m(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Fazendo a expansão binomial, temos a identidade:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Aplicando isso no termo $(x+h)^n - x^n$ no cálculo do limite, temos:

$$\begin{aligned} m(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot h[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots \\ &\quad \dots + (x+h)^2x^{n-3} + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}], \end{aligned}$$

e dividindo numerador e denominador por h , somos levados a

$$m(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots \\ \dots + (x+h)^2x^{n-3} + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}].$$

Perceba agora que, no limite em que h tende a zero, todos os termos do tipo $(x+h)^k$ tendem para x^k , de modo que teremos

$$m(x) = [x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \dots + x^2x^{n-3} + xx^{n-2} + x^{n-1}],$$

e, como se vê, a expressão final é a soma de n termos iguais. Logo, se temos a função $f(x) = x^n$, a função que fornece o coeficiente angular da reta que a tangencia em qualquer ponto x é dada por

$$m(x) = nx^{n-1}.$$

Verificando para os casos anteriores, escolhamos $n = 2$, ou seja, temos $f(x) = x^2$. Nesse caso, a expressão que fornece o coeficiente angular da reta que a tangencia em qualquer ponto x é dada por $m(x) = nx^{n-1} = 2x^{2-1} = 2x$, o que concorda com o resultado que obtivemos anteriormente.

Testando para $n = 3$, encontramos, para a função cúbica, que a expressão que fornece o coeficiente angular da reta que a tangencia em qualquer ponto x é dada por $m(x) = nx^{n-1} = 3x^{3-1} = 3x^2$, o que também concorda com o resultado que obtivemos anteriormente. O leitor pode verificar o caso $n = 4$ por si só.

Seção 2.3 – O cálculo infinitesimal: Limites

Problema 2.10

Queremos entender o que ocorre com a expressão

$$\frac{x^2}{2^x}$$

para valores de x arbitrariamente grandes. Podemos começar simplesmente fazendo uma tabela, com valores crescentes de x , e observar o que ocorre com o numerador e o denominador de tal expressão.

x	x^2	2^x	$\frac{x^2}{2^x}$
1	1	2	0,5
5	25	32	0,78
10	100	1.024	0,0976
20	400	1.048.576	0,000381
30	900	1.073.741.824	0,000000838

Tabela 2.2: Comparação entre os valores das funções $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 2^x$ e $x \mapsto \frac{x^2}{2^x}$ à medida em que x cresce arbitrariamente.

Tal tabela nos mostraria que, à medida que os valores de x aumentam, a expressão 2^x cresce muito mais rápido que a expressão x^2 , de tal modo que, para x muito grande, o denominador sendo infinitamente maior do que o numerador, o valor da expressão tenderá a zero, como indica a última coluna da tabela. Ou seja:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x} = 0.$$

Capítulo 3

Limites

3.1 Intuição

Até aqui, compreendemos que o grande dilema — e, ao mesmo tempo, a principal novidade — do Cálculo reside na necessidade de operar com o infinito. Números que se aproximam infinitamente entre si, grandezas que tendem a zero, e problemas análogos, tornar-se-ão, daqui em diante, nossos companheiros de jornada.

Para lidar com essas situações, iniciaremos a construção rigorosa de uma nova operação: o **limite**. Ela nos permitirá compreender o comportamento de funções e expressões algébricas *no limite* em que uma variável se aproxima indefinidamente de zero ou de outro valor. Num primeiro momento, essa operação parecerá desvinculada dos problemas geométricos clássicos do Cálculo — o cálculo de áreas e de tangentes. No entanto, será justamente o limite a base, o alicerce, o coração que nos permitirá decifrar esses dois problemas centrais. Eis a razão de sua importância.

3.1.1 Por que criar uma nova operação?

A forma mais intuitiva de entender o que essa nova operação faz, no contexto de funções, é a seguinte: ela calcula o que ocorre com a função **em torno** de um ponto.

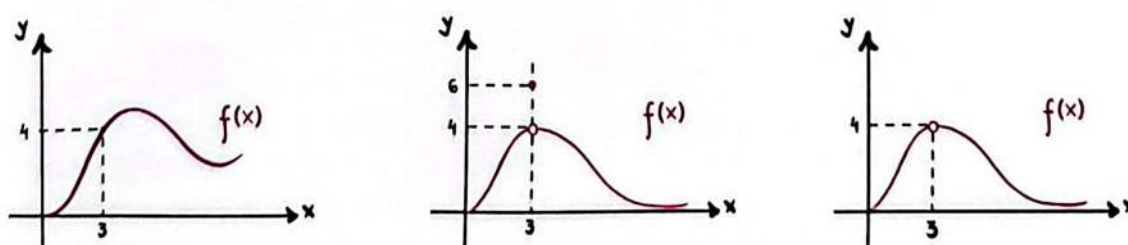


Figura 3.1: Comportamento da função no ponto vs em torno do ponto.

Ou seja, se temos a função $f(x)$, como as da Figura 3.1, $f(3)$ irá calcular qual é

o valor da função avaliada quando $x = 3$. Contudo, podemos querer calcular o que ocorre com a função quando nos *aproximamos* de $x = 3$, ou seja, para qual valor tende $f(x)$ a medida que x se aproxima de 3. Nesse caso, o que calcula isso é o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

A expressão acima deve ser lida como *o limite de $f(x)$ quando x tende a 3*, ou *o limite, quando x tende a 3, de $f(x)$* . Em um primeiro momento, essas duas operações parecem ser a mesma coisa, e é claro que esses dois valores podem coincidir, como seria o caso da função da primeira imagem da Figura 3.1. Neste caso, é fácil ver que à medida que os valores de x se aproximam de 3, os valores de $f(x)$ se aproximam de 4, ou seja:

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4.$$

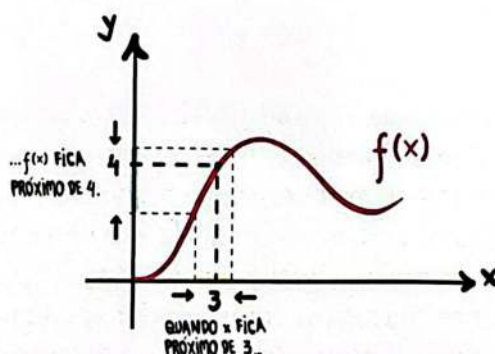


Figura 3.2: Noção intuitiva de limite.

Isso fica ainda mais claro quando vemos a Figura 3.2: à medida que vamos *sandwichando* o valor de x pelas beiradas, em torno de $x = 3$, o valor de $f(x)$ fica *sandwichado* em torno de $f(x) = 4$.

Veja que isso não ocorre com a função da segunda imagem da Figura 3.1. Nesse caso, vemos que $f(3) = 6$, contudo, o gráfico nos mostra que ao nos aproximarmos de $x = 3$, seja por valores maiores que 3 ou menores que 3, nos dois casos, o valor de $f(x)$ se aproxima de 4, ou seja, continua valendo que

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4.$$

Isso quer dizer que tudo nos indica que $f(x)$ deveria assumir o valor 4 em $x = 3$, mas isso não ocorre. Vemos, portanto, que o valor da função em um ponto exato pode diferir do comportamento da função em torno desse mesmo ponto, a saber, neste caso:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3),$$

isto é, o limite nem sempre precisa coincidir com o valor da função no ponto. É por isso que se justifica criarmos essa nova operação, de tomar limites, para que possamos

estudar não qual é o valor da função em um ponto específico, mas sim qual é o comportamento dela em torno daquele ponto. Perceba, por exemplo, que a operação de limite nos permite estudar inclusive o que ocorre em torno de um ponto que sequer faz parte do domínio de uma função. Veja a função da terceira imagem da Figura 3.1. Note que $x = 3$ não faz parte do domínio dessa função: não podemos calcular quanto vale $f(3)$, tal valor não está definido.

Contudo, podemos estar interessados em entender o que ocorre quando nos aproximamos de $x = 3$ e entender o comportamento da função à medida que nos aproximamos desse ponto. O comportamento é simples, como o próprio gráfico nos permite ver, e é o mesmo das funções das duas imagens anteriores: ao nos aproximarmos de $x = 3$, o valor de $f(x)$ se aproxima de 4, ou seja

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4,$$

e a operação de limite nos permitir entender o comportamento da função em torno de $x = 3$ ainda que tal função não esteja definida neste ponto.

3.1.2 Estimando limites

Agora que desenvolvemos uma certa intuição por trás do que significa um limite, vamos tentar ganhar um pouco mais de entendimento do que isso significa calculando, da forma mais rudimentar possível, certos limites.

Exemplo 3.1

Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

É nítido que o valor de $x = 1$ não está no domínio da função em questão. Queremos, porém, entender como a função se comporta em torno desse ponto. Um jeito bem simples de entender isso é montar uma tabela e ir avaliando o que ocorre com os valores de $f(x)$ a medida que os valores de x se aproximam muito de 1, porém sem nunca chegar a ele. A tabela abaixo mostra que, quanto mais próximos de $x = 1$ estivermos, mais próximos os valores de $f(x)$ estarão de 2.

x	$f(x)$
0,8	1,8
0,9	1,9
0,95	1,95
0,99	1,99
0,999	1,999
0,9999	1,9999
0,99999	1,99999
0,999999	1,999999

Tabela 3.1: Valores da função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ à medida em que x se aproxima de 1.

Ou seja, diríamos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Lemos isso como *o limite, quando x tende a 1, de $\frac{x^2-1}{x-1}$, é igual a 2*, ou então *o limite de $\frac{x^2-1}{x-1}$ quando x tende a 1 é igual a 2*.

Podemos chegar nesse resultado algebricamente simplesmente manipulando a expressão da função:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2,$$

em que a última passagem é lida como *o limite de $(x + 1)$ quando x tende a 1 é igual a 2*, o que é trivial, posto que um número desconhecido somado a 1 será muito próximo de 2 quanto mais esse número desconhecido se aproximar de 1 — é isso que a operação de limite quer dizer, intuitivamente.

Algumas observações merecem ser feitas a respeito do Exemplo 3.1. Perceba que, inicialmente, não poderíamos colocar simplesmente $x = 1$ na função — primeiro que tal valor está fora de seu domínio e, em segundo lugar, que quer ele pertencesse ou não ao domínio, havia uma indeterminação matemática em fazer essa operação: teríamos $0/0$, o que não nos ajuda a compreender como a função se comporta em torno daquele ponto.

O caminho tomado — e será este em grande parte das vezes — foi o de manipular a expressão algébrica até que se eliminasse essa indeterminação. Perceba que foi possível simplificar o termo $(x - 1)$ no passo intermediário da nossa manipulação justamente porque tal valor nunca se anula, uma vez que nunca fazemos de fato $x = 1$; ele apenas se aproxima infinitamente de 1, como mostra a tabela acima. Tendo feito isso, chegamos à expressão $(x + 1)$, em que fica evidente entender para qual valor ela tende se x se aproximar de 1.

Se essa foi a primeira vez que o leitor de fato calculou um limite, acredito que vale ainda adentrarmos um pouco mais nas nuances do processo. Parece que, inicialmente, não poderíamos fazer $x = 1$ mas depois, no final, foi exatamente o que foi feito. Qual é a lógica, portanto, desse cálculo?

Compreender o comportamento dos valores na tabela do Exemplo 3.1 é fundamental. Nós nunca, de fato, fazemos $x = 1$, o objetivo é apenas fazer $x \rightarrow 1$, isto é, x tender a 1, aproximar-se infinitamente de 1. O valor de x estará tão próximo de 1 que poderíamos, em tese, até fazer $x = 1$ para compreender o comportamento da função. Isso, no entanto, nos levaria de imediato a uma indeterminação, a uma divisão de zero por zero. Manipulando a expressão, foi possível eliminar essa indeterminação, chegando a uma expressão bem mais simples, a dizer $(x + 1)$, a qual fica evidente que, quanto mais próximo x estiver de 1, mais próximo $(x + 1)$ estará de 2.

Exemplo 3.2

Estime o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Perceba que $x = 0$ não faz parte do domínio da função, teríamos uma indeterminação do tipo $0/0$. Contudo, queremos entender o que ocorre à medida que nos aproximamos deste ponto. Avaliemos o que ocorre com os valores de $\sin(x)$, de x e da sua razão à medida que x se aproxima de zero.

x	$\sin(x)$	$\frac{\sin(x)}{x}$
0,5	0,479	0,95885
0,3	0,295	0,9850
0,1	0,099	0,99833
0,01	0,0099	0,9999833
0,001	0,000999	0,999999833
0,0001	0,00009999	0,9999999983

Tabela 3.2: Comparação entre os valores das funções $x \mapsto \sin(x)$ e $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ à medida em que x se aproxima de 0.

Perceba que à medida que x fica muito próximo de zero, os valores de x e $\sin(x)$ ficam muito próximos, de modo que, ao avançarmos, a sua razão fica muito próxima de 1.

De fato, um leitor atento poderia estimar isso, uma vez que uma aproximação comum de ser feita é de que $\sin(x) \approx x$ para ângulos muito pequenos, que é o nosso caso, já que x está tendendo a zero, ou seja, ele é o ângulo mais próximo de zero que você pode imaginar. Tal aproximação nos indicaria que, de fato, a expressão tende a $\frac{\sin(x)}{x} \approx x/x = 1$.

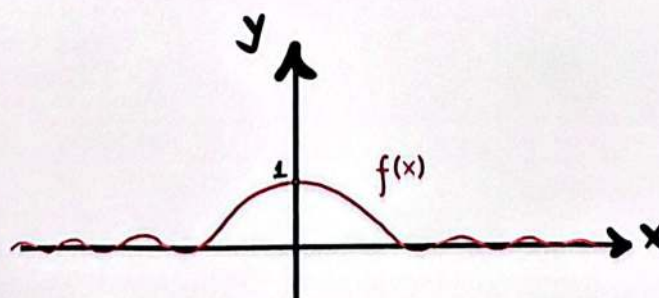


Figura 3.3: Visualizando a função $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

De outro modo, usando algum software que esboce gráficos de funções, o leitor

pode facilmente plotar o gráfico da função $f(x) = \sin(x)/x$ e notar que ele tem o comportamento que desconfiamos: à medida que x se aproxima de 0, o valor da função tende a 1.

Talvez o leitor possa se pegar pensando: *mas seria possível calcular esse limite sem estimar valores pela tabela ou sem fazer essa aproximação do seno de ângulos pequenos?*

A resposta é sim. Existem certos procedimentos e teoremas que nos possibilitam calcular os limites algebricamente, sem precisar estimá-los por meio de tabelas ou de visualizar seus gráficos. Contudo, o objetivo até aqui é que o leitor desenvolva a intuição do que os limites significam e consiga perceber que, munido de uma calculadora, é possível calcular praticamente qualquer limite apenas estipulando valores e observando o que ocorre com eles em uma tabela à medida que x se aproxima do valor desejado.

Exemplo 3.3

Estime o valor de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Este é um exemplo que nos mostra como nossa intuição inicial a respeito do valor de um limite pode ser falha. De imediato, o leitor pode pensar que, ao se aproximar do infinito, o termo $1/x$ tende a zero, de modo que teríamos apenas 1^x e, como a unidade elevada a qualquer número é 1, tudo parece indicar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1.$$

Isso, contudo, não está correto, como podemos ver na tabela abaixo.

x	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)$	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
10	1,1	2,59374246
100	1,01	2,704813829
1.000	1,001	2,716923932
10.000	1,0001	2,718145927
100.000	1,00001	2,718268237
1.000.000	1,000001	2,718280469
10.000.000	1,0000001	2,718281694
100.000.000	1,00000001	2,718281798

Tabela 3.3: Comparação entre os valores das funções $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ e $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ à medida em que x cresce arbitrariamente.

Veja que, realmente, o valor de $(1 + \frac{1}{x})$ fica muito próximo de 1 à medida que x cresce. Porém, mesmo tal valor sendo muito pequeno, como ele está sendo exponenciado por um valor que fica cada vez maior, isto é, o próprio x , esse crescimento exponencial sutil causa um efeito inesperado: o resultado cresce e tende para um valor diferente de 1; no caso, para 2,71828... Logo, a expressão correta do limite é

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2,71828 \dots \quad (3.1)$$

Tal número é uma constante matemática importante, recebendo, portanto, até mesmo um nome e um símbolo próprio: e , o número de Euler, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler. Este número é a base dos logaritmos naturais e será central no estudo do Cálculo.

Perceba como é fácil se confundir a respeito do valor de um limite. Nossa intuição pode facilmente nos enganar, uma vez que, no limite em que as coisas ficam infinitamente pequenas ou infinitamente grandes, pequenas sutilezas podem causar efeitos relevantes que são difíceis de serem percebidos ou intuídos em um primeiro momento. O Exemplo 3.3 deixa isso bem claro.

Exemplo 3.4

Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x).$$

Em uma primeira leitura o leitor poderia pensar que, por ser uma função limitada entre 1 e -1 , à medida que x ficar muito grande, o limite da função $\sin(x)$ deve se aproximar de algum valor finito, talvez zero.

Apesar disso, voltando ao clássico recurso de estimar os valores e avaliar a sua tendência pela tabela, vemos que este não é o caso.

x	$\sin(x)$
1	0,8414709848
10	-0,5440211109
100	-0,5063656411
1.000	0,8268795405
10.000	-0,3056143889
100.000	0,03574879797
1.000.000	-0,3499935022
10.000.000	0,4205477932
100.000.000	0,9316390271

Tabela 3.4: Valores de $\sin(x)$ à medida em que x cresce arbitrariamente.

A tabela deixa claro que não existe um padrão, ou seja, à medida que x fica muito grande, os valores de $\sin(x)$ oscilam de modo aparentemente arbitrário, não se aproximando de algum valor específico — o que é condizente com o comportamento da função seno, que é oscilatória. Neste caso, dizemos que o limite não existe:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) \text{ não existe.}$$

Ora, é intuitivo que no Exemplo 3.4 tiremos a conclusão de que o limite não existe, porque ele não tende exatamente para um único valor. Contudo, se o limite não existe, o que faz com que um limite exista? Precisamos de uma definição mais precisa a respeito do limite e da sua existência.

3.2 Limites laterais

Perceba que o comportamento de uma função à medida que x se aproxima de um certo valor, digamos x_0 , pode diferir caso nos aproximemos deste ponto por valores maiores ou menores que x_0 , como mostra a Figura 3.4.

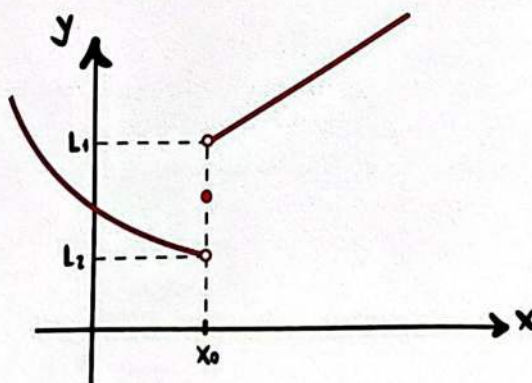


Figura 3.4: Limites laterais.

Nesse caso, se nos aproximarmos de x_0 pela direita, isto é, por valores maiores que x_0 , tem-se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1,$$

e se nos aproximarmos de x_0 pela esquerda, isto é, por valores menores que x_0 , tem-se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_2.$$

Definição 3.1: Limites Laterais

A expressão

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

calcula o limite à direita de $f(x)$ quando $x > x_0$ tende a x_0 . Dizemos, também, que x tende a x_0 pela direita. Dizer que tal limite é igual a L significa que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto quisermos, bastando, para isso, aproximar suficientemente x de x_0 **por valores maiores que x_0** .

Naturalmente, a definição de

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

é análoga, implicando que $f(x)$ pode se tornar tão próximo de L quanto quisermos, bastando para isso aproximar suficientemente x de x_0 **por valores menores que x_0** , ou seja, nos aproximamos pela esquerda de x_0 .

Exemplo 3.5: Cálculo de Limites Laterais

Calcule os limites laterais quando x tende a 0 da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 2x + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Se x tende a zero pela esquerda, isto é, por valores menores que zero, a lei da função nesse domínio é dada por $f(x) = x^2$, de tal modo que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0.$$

Já quando x tende a zero pela direita, isto é, por valores maiores que zero, usamos como lei da função a expressão $f(x) = 2x + 1$, de tal modo que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) = 1.$$

Em situações como as da Figura 3.4 ou os do Exemplo 3.5, em que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),$$

dizemos que o limite da função não existe. Isso parece bem natural, uma vez que o comportamento da função em torno daquele ponto não é único: ele depende do caminho que tomamos, isto é, se nos aproximamos pela direita ou pela esquerda.

Definição 3.2: Existência do Limite

Dizemos que o limite da função $f(x)$, quando x tende a x_0 , é igual a L se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

e escrevemos isso como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

o que quer dizer que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto quisermos, bastando, para isso, aproximar suficientemente x de x_0 — não importando o lado pelo qual nos aproximamos.

Aqui vale uma breve revisita à Figura 3.2 para ficar clara a definição de limite: ao nos aproximarmos de um valor, no caso da figura, $x = 3$, não importando o lado pelo qual nos aproximamos, o valor da função fica espremido em torno de um certo valor, no caso, $f(x) = 4$. É isso que significa dizer que

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4,$$

ou seja, podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos e espremidos em torno de 4 quanto quisermos, bastando para isso escolher valores de x suficientemente próximos de 3, não importando se são valores ligeiramente maiores ou menores que 3. No caso de tal figura, ocorre, também, que $f(3) = 4$, mas isso não seria necessário, porque já vimos outros casos em que existe o limite, e ainda assim, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3).$$

Exemplo 3.6

Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

Ora, a função módulo é tal que $|x|$ é igual a x para $x \geq 0$ e é igual a $-x$ para $x < 0$, ou seja, ela é uma função definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Logo, a função $f(x) = \frac{|x|}{x}$ é descrita por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

e, portanto, vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1,$$

ou seja, o limite pedido não existe.

Esse é um limite interessante, pois, à primeira vista, ele parece ser bem óbvio, mas, destrinchado em detalhes, vemos que o comportamento da função difere quando nos aproximamos de zero pela direita ou pela esquerda, levando à inexistência do limite.

Lembre-se sempre disso: o limite só vai existir quando:

1. Os limites laterais existirem.
2. Os limites laterais coincidirem.

3.3 Limites infinitos

Vamos agora entrar em mais detalhes acerca de alguns casos — já inclusive discutidos em exemplos anteriores, mas sem fazer as ressalvas que agora faremos — que envolvam o infinito: seja quando x tende a um valor infinito seja quando, ao aproximar x de um certo valor finito x_0 , a função tende a infinito.

3.3.1 Quando a função tende a infinito

Existem casos em que, ao aproximar x de um certo valor x_0 , a função $f(x)$ não tende para um valor específico, mas sim fica arbitrariamente grande. Nesse caso, é comum escrevermos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty. \quad (3.2)$$

Entretanto, é importante que o leitor note que, lendo a rigor a Definição 3.2, teríamos que afirmar que tal limite não existe, haja vista que não existe o número L do qual a função $f(x)$ se aproxima quando x se aproxima de x_0 : ∞ não é um número, mas uma representação de que a função assume valores arbitrariamente grandes quando x se aproxima de x_0 .

O leitor há de notar, contudo, que, apesar da não existência do limite, é conveniente escrever a Equação (3.2) para informar o tipo de comportamento da função quando x se aproxima de x_0 . Posto isso, será comum escrevermos, nestes casos, a expressão da Equação (3.2), mas é importante que o leitor sempre se lembre de que essa é apenas uma representação conveniente para registrarmos uma informação acerca do comportamento da função; o limite, de fato, não existe nesse caso.

Exemplo 3.7

Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-4)^2}.$$

No limite em que $x \rightarrow 4$, o nosso denominador tende a zero, de modo que a função explode: como mostra a tabela abaixo, quanto mais próximo estivermos de $x = 4$, maior será o valor da função.

x	$f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$
3	1
3,5	4
3,9	100
3,99	10.000
3,999	1.000.000
3,9999	100.000.000
3,99999	10.000.000.000
3,999999	999.999.999.720

Tabela 3.5: Valores de $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ à medida em que x se aproxima de 4.

Claramente o limite não existe, mas é comum e conveniente escrevermos

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty$$

para representarmos tal comportamento.

Em casos como no Exemplo 3.7 ou, de modo geral, em todos os casos do tipo descrito pela Equação (3.2), o comportamento da função é tal que, sempre que ela se aproxima cada vez mais de um certo valor, digamos $x = a$, o seu valor cresce arbitrariamente. Em casos como este, dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota da curva $f(x)$ — ela é uma espécie de *parede invisível* da função: à medida que nos aproximamos dela, os valores de $f(x)$ crescem descontroladamente e nunca conseguimos tocá-la ou cruzá-la.

Definição 3.3: Assíntotas Verticais

A reta $x = a$ é dita assíntota **vertical** da curva $f(x)$ se o limite pela esquerda ou o limite pela direita ou o limite de $f(x)$, quando x tende a a , for $\pm\infty$.

A Figura 3.5 mostra alguns exemplos de funções com assíntotas verticais. O primeiro gráfico representa a função do Exemplo 3.7 que, como vimos, possui uma

assíntota em $x = 4$, uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty.$$

O segundo gráfico representa a função $f(x) = \frac{1}{x-1}$, e fica a cargo do leitor mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \quad \text{e que} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty,$$

ou seja, a reta $x = 1$ é assíntota de tal função.

O último gráfico de tal figura mostra a função $f(x) = \ln(x)$. O leitor pode constatar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty,$$

ou seja, o eixo vertical, definido pela reta $x = 0$, é assíntota vertical de tal função.

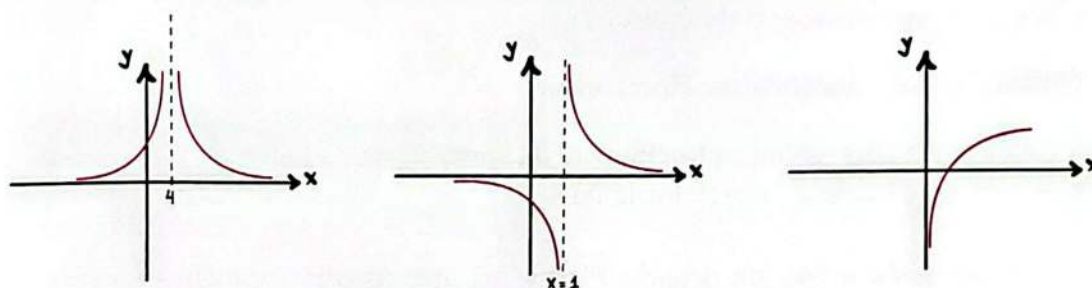


Figura 3.5: Assíntotas verticais.

Exemplo 3.8

Encontre as assíntotas verticais da função $f(x) = \tan(x)$.

Queremos encontrar a reta $x = a$ tal que, quando x se aproximar de a , o valor da função explodirá. Como

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

tal situação irá ocorrer quando o denominador se aproximar de 0, ou seja, sempre que $\cos(x) \rightarrow 0$. As soluções da equação $\cos(x) = 0$ são do tipo $x = (k + \frac{1}{2})\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo, teremos

$$\lim_{x \rightarrow (k+\frac{1}{2})\pi} \tan(x) = \pm\infty,$$

e as retas do tipo $x = (k + \frac{1}{2})\pi$ são assíntotas verticais da função.

3.3.2 Quando x tende a infinito

De outro modo, ao invés de x se aproximar de um valor finito e o valor da função explodir, podemos fazer x explodir, isto é, $x \rightarrow \pm\infty$, e perceber que o valor da função tende a um valor finito, isto é

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L. \quad (3.3)$$

Este caso é chamado de *limite no infinito*. Note que, a rigor, tal notação é um abuso de linguagem se olharmos atentamente para a Definição 3.2, uma vez que o valor de $f(x)$ está se aproximando de L , porém, sem que o valor de x esteja se aproximando de um número específico: ele está ficando arbitrariamente grande, assumindo valores cada vez maiores. Mais uma vez, veja que é conveniente usar a notação descrita na Equação (3.3) no sentido de que ela informa qual é o comportamento da função $f(x)$ quando x assume valores arbitrariamente grandes, ainda que, a rigor, tal expressão não faça sentido dentro da definição de limite. Com isso, aproveitaremos de tal conveniência e será comum usarmos tal notação. Em tais casos, diremos que a reta $y = L$ é assíntota horizontal da função $f(x)$.

Definição 3.4: Assíntotas Horizontais

A reta $y = L$ é dita assíntota **horizontal** da curva $f(x)$ se o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$ for igual a L .

O leitor pode notar, na própria Figura 3.5, que as duas primeiras funções de tal imagem possuem, além das assíntotas verticais anteriormente descritas, assíntotas horizontais, dadas por $y = 0$ em ambos os casos. A Figura 3.6 representa e destaca certas funções e suas assíntotas horizontais.

Exemplo 3.9

Encontre a(s) assíntota(s) horizontal(is) da função

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x^2 - 2}.$$

Inicialmente, ao fazer $x \rightarrow \pm\infty$, o leitor pode pensar que o numerador e o denominador crescerão em uma mesma taxa, uma vez que ambos envolvem o termo x^2 . Isso pode levá-lo a acreditar que a função $f(x)$ tenderá para 1 para valores de x arbitrariamente grandes; ou talvez para 3, uma vez que o termo quadrático do numerador é multiplicado por tal fator. Para fazer uma análise mais precisa, é interessante reescrever tal função como

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x^2 - 2} = \frac{3 + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}},$$

em que dividimos por x^2 o numerador e o denominador. Disso fica claro que, quando $x \rightarrow \pm\infty$, os termos com x^2 no numerador vão para zero e a expressão

tende a $\frac{3}{1}$, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 5}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Portanto, a reta $y = 3$ é assíntota horizontal da função $f(x)$. Note que a função poderia ter assíntotas horizontais distintas quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$. Neste caso, contudo, como o valor de x aparece sempre elevado ao quadrado na nossa função, os limites quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$ terão o mesmo comportamento, o que nos possibilitou analisar os dois casos de uma só vez, isto é, $x \rightarrow \pm\infty$.

A primeira imagem da Figura 3.6 representa o gráfico da função do Exemplo 3.9. A segunda imagem é o gráfico da função exponencial decrescente $f(x) = 5e^{-x} + 5$, que, como o leitor pode verificar, satisfaz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5e^{-x} + 5) = 5,$$

possuindo assíntota horizontal em $y = 5$.

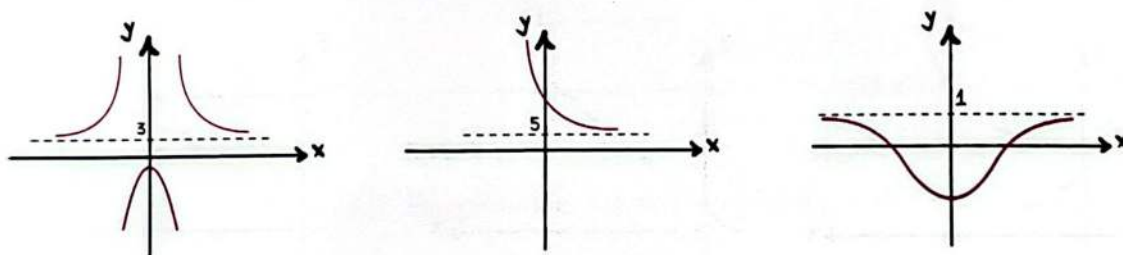


Figura 3.6: Assíntotas horizontais.

Já a terceira imagem representa a função

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1},$$

que, como leitor poderá verificar, possui assíntota horizontal em $y = 1$.

3.4 Continuidade

Vamos agora à definição de função contínua, que só é possível ser feita de forma precisa por meio dos limites. De modo intuitivo, pode-se pensar que uma função $f(x)$ é contínua se você pode desenhar o seu gráfico sem tirar a caneta do papel. Isso quer dizer que a função não dá saltos, transitando de modo suave entre um valor e outro.

Dito isso, apenas com essa intuição e pelo conhecimento do gráfico de algumas funções clássicas, podemos destacar algumas delas conhecidas pelo leitor que são contínuas:

1. Trigonômétricas

As funções $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são contínuas. O Exemplo 3.14 provará que, de forma geral, as variações $f(x) = a + b \sin(mx + n)$ e $g(x) = a + b \cos(mx + n)$, para $a, b, m, n \in \mathbb{R}$, serão, também, contínuas.

2. Exponencial/Logaritmos

Também são contínuas em todo o seu domínio — tente desenhar os seus gráficos e você verá que consegue fazê-lo sem tirar o lápis do papel.

3. Polinomiais

Toda função polinomial $p(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ de coeficientes $a_k \in \mathbb{R}$ é contínua em todo o seu domínio. Veremos mais adiante que as outras funções citadas acima, por meio da série de Taylor, podem ser escritas como funções polinomiais, de modo que a continuidade delas é consequência imediata da continuidade dos polinômios.

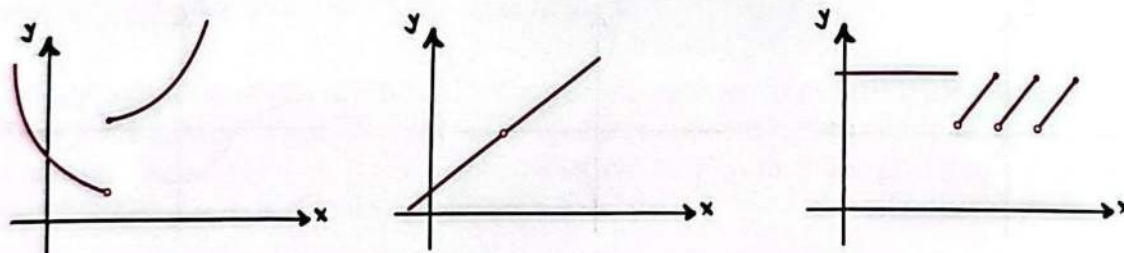


Figura 3.7: Funções que possuem descontinuidade.

A Figura 3.7 mostra exemplos de funções que **não são contínuas**. Perceba que nesses casos sempre existe ao menos um ponto que exigiria que o leitor tirasse a caneta do papel para continuar desenhando o gráfico — isso ocorre justamente na hora que a função dá o *salto*.

Note que, nesses pontos de descontinuidade, onde a função *salta*, ocorre uma divergência entre o comportamento da função em torno de um ponto e o valor da função em si. Ou seja, se aproximando pela esquerda, a função tende a um certo valor, mas o valor real da função naquele ponto é outro, e é isso que exige que tiremos a caneta do papel: uma descontinuidade, uma divergência entre o valor da função naquele ponto e o valor para o qual a função tende, ou seja, o limite.

Posto isso, podemos usar a noção de limite para definir a continuidade de uma função. Uma função é contínua quando ela não dá saltos, ou seja, quando o seu comportamento em torno de um ponto coincide com o valor da função ali.

Definição 3.5: Continuidade em um ponto

Dizemos que a função $f(x)$ é contínua no ponto x_0 se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Note que a Definição 3.5 de continuidade pontual pressupõe, naturalmente, algumas exigências:

1. Que a função $f(x)$ esteja definida em todos os valores de $x_0 \in \text{Dom}(f)$, uma vez que, para que o limite coincida com o valor da função, é preciso que $f(x)$ exista em todo o domínio. Logo, só se pode falar de continuidade em um ponto x_0 caso tal valor pertença ao domínio da função.
2. Que o limite quando x tende a x_0 exista, ou seja, que os limites laterais existam e coincidam quando $x \rightarrow x_0$.

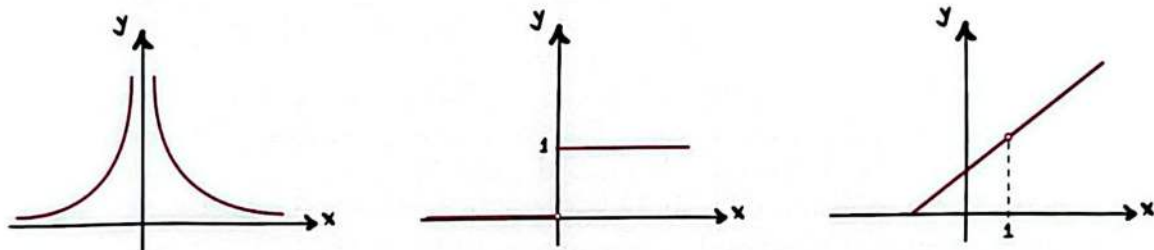


Figura 3.8: Funções com alguma descontinuidade.

Note que, pela definição, podem haver alguns motivos que geram descontinuidade na função:

1. Os limites laterais podem não existir.

Nesse caso, a situação mais comum é quando há uma assíntota vertical, ou seja, os valores de $f(x)$ tendem a infinito quando x se aproxima de um certo valor. Dizemos que há uma descontinuidade infinita nessa situação.

2. Os limites laterais podem existir e não coincidir.

Nessa situação, veremos que isso ocasionará saltos na função, por isso é comum chamarmos essa situação de descontinuidade de salto ou pulo de descontinuidade.

3. Os limites laterais podem existir, coincidir, porém a função pode não estar definida naquele ponto, ou assumir um valor diferente daquele assumido pelo limite.

Nesse caso, o aspecto será como se tivéssemos apenas removido um ponto do gráfico padrão da função, por isso dizemos que trata-se de uma descontinuidade removível.

Podemos ver a diferença entre essas 3 situações nos gráficos da Figura 3.8. Considere a primeira imagem, que representa o gráfico da função $f(x) = 1/x^2$. A descontinuidade gerada é do tipo infinito, uma vez que, em $x = 0$, os limites laterais tendem a infinito — nem os limites nem a função existem em tal ponto.

Já a função da segunda imagem, conhecida como função degrau de Heaviside, e descrita pela equação

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

possui uma descontinuidade em $x = 1$ do tipo salto. Perceba que os limites laterais existem, porém, eles não coincidem. Isso faz com que a função dê um salto naquele ponto, no caso, em $x = 1$. Essa é a mesma descontinuidade que aparece nos Exemplos 3.5 e 3.6.

Já a terceira imagem da Figura 3.8 representa a função dada pela equação

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1},$$

que é a mesma função do Exemplo 3.1. Note, neste caso, que os limites laterais existem e coincidem, porém, a própria função não está definida naquele ponto — ou poderia também ser o caso de ela estar definida mas seu valor ali não coincidir com o valor do limite, como no caso da segunda imagem da Figura 3.1. Chamamos isso de descontinuidade removível, pois como o gráfico da função indica, é como se tivéssemos apenas removido um único ponto da função — como os limites laterais existem e coincidem a função não dá saltos ou, se o leitor preferir, ela não dá saltos *abruptos*, dá apenas um *pequeno salto*, de um único ponto.

Exemplo 3.10

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ 3, & x = 2. \end{cases}$$

- (i) Existe o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow 2$?
- (ii) O valor de $f(2)$ existe?
- (iii) Ela é contínua em $x = 2$?

Podemos manipular a expressão da função para $x \neq 2$ e reescrevê-la como

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Nesse caso é fácil ver que

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = 4,$$

ou seja, os limites laterais existem e coincidem. Logo, existe o limite da função quando $x \rightarrow 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Contudo, pela lei da função, vemos que $f(2) = 3$, ou seja, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2),$$

e, como o limite e o valor da função divergem, existe uma descontinuidade da função em $x = 2$.

Temos aqui uma descontinuidade do tipo removível — o gráfico da função não dará saltos, será apenas como se tivéssemos removido um ponto e colocado em outro lugar. Podemos inclusive remover essa descontinuidade redefinindo a função para que o seu valor em $x = 2$ coincida com o limite, ou seja, redefinindo-a como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ 4, & x = 2. \end{cases}$$

Para as três imagens da Figura 3.8, temos três funções que possuem um ponto de descontinuidade em $x = 0$, $x = 0$ e $x = 1$, respectivamente. Note que, quando falamos de continuidade e descontinuidade, estamos sempre avaliando um único ponto da função: se o limite existir e coincidir com o valor da função ali, ela será contínua naquele ponto.

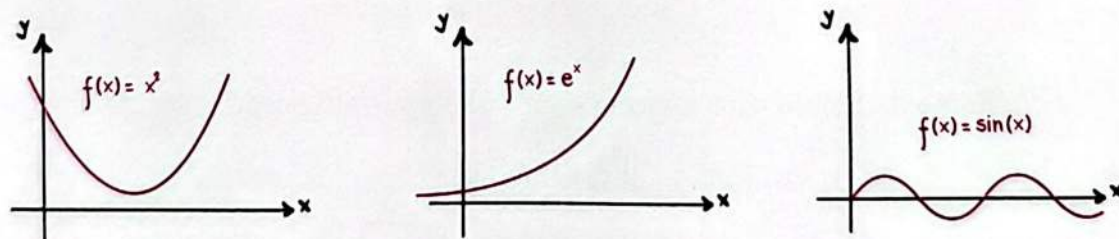


Figura 3.9: Funções contínuas.

Perceba que as funções da Figura 3.9 são exemplos de funções contínuas em todo o intervalo do seu domínio. Podemos, portanto, definir a continuidade não apenas em um ponto, mas em um intervalo: uma função será contínua em um intervalo se for contínua em todos os pontos daquele intervalo.

Definição 3.6: Continuidade em um intervalo

Dizemos que a função $f(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$, se e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

para todo $x_0 \in [a, b]$.

Note que, dadas as definições, não faz tanto sentido falar em funções contínuas e descontínuas. Uma função pode ser contínua em um certo intervalo $[a, b]$, porém ter alguma descontinuidade em um ou mais pontos em um outro intervalo $[c, d]$. O mais comum daqui em diante será falarmos sobre continuidade de funções em certos intervalos.

Exemplo 3.11

Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja lei é dada por $f(x) = x^2$. Mostre que ela é contínua no intervalo $[0, 1]$.

O leitor conhece, naturalmente, o aspecto do gráfico de tal função, de modo que é nítida sua continuidade em tal intervalo — na verdade, tal função é contínua em todo o seu domínio. Queremos aqui, contudo, esboçar o raciocínio de uma argumentação matemática que garanta a continuidade sem nos atermos — ou até sem conhecermos — os aspectos do gráfico de uma função.

Ora, para garantir a continuidade no intervalo, precisamos garantir algumas coisas. Para um valor de x_0 **qualquer** contido no intervalo $[0, 1]$ precisamos que

1. A função esteja definida em todo ponto do intervalo, ou seja: $f(x_0) = x_0^2$ exista para todo x_0 no intervalo $[0, 1]$.
2. Os limites laterais existam e coincidam

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

3. O limite da função coincida com o seu valor em todo ponto x_0 no intervalo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Vamos avaliar cada um desses pontos:

1. Existência da função em todo o intervalo

O primeiro ponto é imediato. A lei da função deixa claro que não há algum tipo de restrição para valores que x possa assumir em todo o intervalo do seu domínio, o que vale, em particular, para o intervalo $[0, 1]$. Logo, para todo x_0 nesse intervalo, existe x_0^2 — todo número possui um quadrado, ou seja, a função está definida em todo o intervalo.

2. Existência dos limites laterais

Ora, como precisamos avaliar o limite em que $x \rightarrow x_0$, defina $\Delta x = (x - x_0)$. Desse modo, ao fazer x se aproximar de x_0 pela direita, isto é, por valores maiores que x_0 , isso será o mesmo que fazer Δx se aproximar de 0 pela direita. Isto é:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} x^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} (x_0 + \Delta x)^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} (x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) = x_0^2.$$

Ao fazer x se aproximar de x_0 pela esquerda, isto é, por valores menores que x_0 , isso será o mesmo que fazer $\Delta x = (x - x_0)$ se aproximar de 0 pela esquerda, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} x^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} (x_0 + \Delta x)^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} (x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) = x_0^2.$$

Ou seja, vemos que os limites laterais existem e coincidem, o que nos permite escrever

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2 \quad \text{para todo } x_0 \in [0, 1].$$

3. Coincidência do limite da função com o seu valor

Os dois últimos pontos nos mostram que, para todo x_0 no intervalo $[0, 1]$, o valor da função coincide com o limite, ou seja:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = x_0^2.$$

Logo, a função $f(x) = x^2$ é contínua em todo o intervalo $[0, 1]$ — na verdade para todo x_0 no domínio da função, uma vez que, em momento algum, nossa argumentação se restringiu ao fato de x_0 estar no intervalo $[0, 1]$.

3.4.1 Teorema de Bolzano

Vamos agora estudar um teorema que nos permite identificar a existência de raízes de funções em certos intervalos.

Teorema de Bolzano

Teorema. Se uma função $f(x)$ é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e assume valores de sinais opostos nos extremos do intervalo, ou seja, $f(a) \cdot f(b) < 0$, então, existe pelo menos um número c no intervalo $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Usando a intuição de que uma função é contínua se seu gráfico pode ser desenhado sem tirar a caneta do papel, desafio o leitor a desenhar o gráfico de uma função — contínua, naturalmente — sem que ele cruze o eixo horizontal ao trocar de sinal. Uma breve reflexão sobre esse processo convencerá o leitor da validade do teorema, que diz essencialmente que, ao trocar de sinal — como a função não dá saltos, não tem pontos removidos nem explode para o infinito, ou seja, ela é contínua — obrigatoriamente ela deve cruzar o eixo x , isto é, deve haver alguma raiz ali entre os valores de $x = a$ e $x = b$ se a função troca de sinal entre a e b .

A demonstração do teorema será discutida no próximo tópico.

Exemplo 3.12

Localize um intervalo no qual há alguma raiz da função $f(x) = e^x - 3x$.

Temos aqui duas funções claramente contínuas, isto é, $g(x) = e^x$ e $h(x) = 3x$. Na próxima seção, usando propriedades de limites, veremos que a soma ou a diferença de funções contínuas é, também, contínua. Nesse caso, $f(x) = e^x - 3x$ é contínua.

Vamos pegar — por simplicidade — o valor da função em $x = 0$, isto é, $f(0) = 1$. Temos aqui um valor positivo. Como e^x cresce bem mais rápido que $3x$, para valores grandes de x a função será sempre positiva. Logo, tentemos avaliar alguns valores menores:

$$f(1) = e - 3 < 0$$

$$f(2) = e^2 - 3 > 0,$$

e, de $x = 2$ em diante, o valor da função é sempre positivo.

Ora, pelo Teorema de Bolzano, vemos que certamente há uma raiz no intervalo $[0,1]$, porque $f(0) > 0$ e $f(1) < 0$. Do mesmo modo, há também (ao menos) uma raiz no intervalo $[1,2]$, uma vez que $f(1) < 0$ e $f(2) > 0$.

A equação a ser resolvida para encontrar as raízes de $f(x)$ é

$$e^x - 3x = 0,$$

e trata-se de uma equação transcendental, que não pode ser resolvida algebricamente. Desse modo, mesmo sem poder calcular e encontrar exatamente as raízes — usando apenas a álgebra —, o Teorema de Bolzano nos permite entender em quais intervalos podemos encontrar raízes e, até mesmo, eventualmente estimá-las.

3.4.2 Teorema do Valor Intermediário

Vamos agora a um importante teorema sobre continuidade de funções.

Teorema do Valor Intermediário

Teorema. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(a) \neq f(b)$ e k é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$, então, existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.

O teorema garante que, se uma função é contínua e assume valores diferentes em a e b , então ela obrigatoriamente passa por **todos os valores intermediários** entre $f(a)$ e $f(b)$. Isso significa que o gráfico da função não pode “pular” valores — ele deve atravessar todos os pontos entre $f(a)$ e $f(b)$, o que é de se esperar para uma função contínua.

Vemos que o Teorema de Bolzano torna-se um caso particular deste. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, então $k = 0$ é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$. Logo, o Teorema do Valor Intermediário garante que há pelo menos um valor c em $[a, b]$ para o qual

$$f(c) = k = 0,$$

ou seja, a função tem uma raiz nesse intervalo.

“A demonstração deste teorema será apresentada na próxima seção, com base na definição formal de limite.” Essas foram as exatas palavras com as quais pensei em começar a escrever este parágrafo. Percebi que isso, contudo, levaria a parecer que este escriba tenta apenas ganhar tempo, adiando demonstrações na esperança de que o leitor as esqueça e, quem sabe, eu escape incólume da obrigação. Mas não tema: honrarei as calças que visto e cumprirei o prometido. A título de explicação — ainda que me pareça desnecessária, mas a boa educação assim exige — vale notar que, ao demonstrarmos o Teorema do Valor Intermediário, garantimos automaticamente a prova do Teorema de Bolzano, pois este não passa de um caso particular daquele. Eis a razão de sua demonstração ter sido postergada na seção anterior, caro leitor. Entretanto, para que não haja mais delongas, vamos a uma bela demonstração do Teorema de Bolzano por contradição.

Demonstração do Teorema de Bolzano

Considere que f é contínua no intervalo $[a, b]$, com $f(a) < 0 < f(b)$. Suponha que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Como, por suposição, f nunca se anula no intervalo $[a, b]$, então ela tem sinal constante:

1. ou $f(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$,
2. ou $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Consideremos o primeiro caso. Ora, nesse contexto, teríamos

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) < 0,$$

mas sabemos que $f(b) > 0$, de modo que seria impossível termos

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b).$$

Tal condição, contudo, deve ser satisfeita, uma vez que partimos da premissa de que f é contínua no intervalo $[a, b]$. Considerando o segundo caso, o raciocínio é análogo e somos levados à mesma contradição. Concluímos, portanto, que nossa suposição de que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$ estava errada: a função deve se anular em algum ponto do intervalo. ■

Logo antes de fazermos tal demonstração, foi dito que, ao provar o Teorema do Valor Intermediário (TVI), ficaria provado o Teorema de Bolzano, por este ser um caso particular daquele. Tomamos aqui o caminho contrário. O leitor consegue perceber como, a partir da demonstração do Teorema de Bolzano, podemos incorrer na demonstração do TVI?

Exemplo 3.13

A altura h , em km, de um satélite que orbita a Terra é descrita como função do tempo pela expressão

$$h(t) = 400 - 5(t - 12)^3, \text{ onde } t \in [10, 16].$$

Existe algum instante em que o satélite esteve a exatamente 300 km de altura?

Um caminho natural é resolver a equação cúbica $300 = 400 - 5(t - 12)^3$ e avaliar se ela possui solução no intervalo $[10, 16]$.

Podemos, entretanto, tentar traçar um argumento mais sofisticado que não envolva a solução de equações cúbicas. Vamos avaliar quais são as alturas nos extremos do intervalo:

$$\begin{aligned} h(10) &= 400 - 5(10 - 12)^3 = 360, \\ h(16) &= 400 - 5(16 - 12)^3 = 80. \end{aligned}$$

A altura do satélite é, naturalmente, uma função contínua: o satélite precisa passar por todos os níveis de altura entre 80 e 360 para sair de uma posição até outra. Logo, vale o Teorema do Valor Intermediário, que afirma que existe pelo menos um $t \in [10, 16]$ tal que $h(t) = 300$, uma vez que $h(t)$ é contínua e 300 está entre $h(10) = 360$ e $h(16) = 80$. Portanto: sim, o satélite certamente esteve a 300 km de altura em algum instante t no intervalo $[10, 16]$.

3.5 Propriedades dos limites

Listaremos abaixo algumas propriedades dos limites. Para tal, considere que, dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$, os limites

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

existem. As propriedades são:

1. Multiplicação por constante

$$\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ em que } k \in \mathbb{R}.$$

2. Linearidade

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

3. Produto

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

4. Quociente

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)},$$

em que a última propriedade vale desde que o seguinte seja satisfeito:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

A primeira propriedade é, na verdade, um caso particular da terceira, bastando fazer nela $g(x) = k$, sendo k constante. Temos, portanto, tudo resumido em: o limite da soma/diferença é a soma/diferença dos limites e o limite do produto/quociente de funções é o produto/quociente dos limites de tais funções.

Em alguma medida, já chegamos a usar, de forma intuitiva e sem fazer menção direta, algumas dessas propriedades no desenrolar de alguns exemplos que fizemos. Essas propriedades são importantes para o desenvolvimento do cálculo de certos limites e podem ser demonstradas usando a definição formal de limites, que será vista na próxima seção.

3.5.1 Algumas aplicações

Vamos agora explorar alguns teoremas e propriedades de funções que são consequências das propriedades de limites acima elencadas.

Exemplo 3.14: Continuidade de funções

Sendo f e g duas funções contínuas em um ponto x_0 , mostre que a soma, a diferença, o produto e o quociente dessas funções — salvas as devidas restrições — também são contínuas em x_0 .

Se f e g são contínuas em x_0 , podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= g(x_0). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Seja a função $h(x) = f(x) + g(x)$. Logo, usando a propriedade de que o limite da soma é a soma dos limites, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = h(x_0),$$

onde, no último passo, usamos as Condições (3.4) de continuidade das funções f e g . Logo, como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h(x_0),$$

fica provada a continuidade de $h(x)$ no ponto x_0 .

Definindo $h(x) = f(x) - g(x)$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ e $h(x) = f(x)/g(x)$, a demonstração segue de forma semelhante como consequência direta das propriedades de limites.

Exemplo 3.15: Continuidade da função composta

Avalie a continuidade da função $f(x) = \ln(1 + \sin(x))$ em $x = 0$.

Ora, a função $h(x) = \sin(x)$ é claramente contínua em todo o seu domínio — lembre-se do gráfico de tal função e o leitor se convencerá disso sem grandes esforços.

A função constante $g(x) = 1$ também é contínua em todo domínio, de modo que a função $t(x) = h(x) + g(x)$ também o será, como consequência do que foi construído no Exemplo 3.14. A função $p(x) = \ln(x)$, por sua vez, também é contínua em todo o seu domínio, como já destacamos em outro momento.

Se duas funções $p(x)$ e $t(x)$ são contínuas, a sua composição, isto é, $p(t(x))$, também o será, de modo que $f(x) = \ln(1 + \sin(x))$ é, portanto, contínua em todo o seu domínio. O leitor consegue provar este fato?

3.5.2 Vários exemplos

Vamos agora explorar diversos cálculos de limites. Em muitos deles as propriedades de limites precisarão ser usadas no desenrolar algébrico. Entretanto, o passo principal do procedimento para calcular tal limite não residirá nesses fatos. Considere, por exemplo, a tarefa de calcular quanto vale

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 5).$$

Ora, tal limite é trivial e pode ser calculado pelo desenvolvimento:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 5) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2) + \lim_{x \rightarrow 2} (x) + \lim_{x \rightarrow 2} (5) = 4 + 2 + 5 = 11.$$

Note que seu desenvolvimento algébrico exige apenas o uso do fato de que o limite da soma é igual à soma dos limites, mas não há dificuldade alguma nesse cálculo. As

dificuldades surgem quando, de imediato, não conseguimos notar o que ocorre com o valor da expressão quando x se aproxima de um certo valor x_0 pelo fato da expressão cair em alguma indeterminação do tipo $0/0$ como ocorreu no Exemplo 3.2, ou 1^∞ , como ocorreu no Exemplo 3.3. O que queremos fazer é encontrar processos e mecanismos que nos possibilitem, algebricamente, calcular tais limites sem a necessidade de desenhar tabelas e estimar valores.

Dividiremos os exemplos a seguir por meio do tipo de indeterminação que surge de modo a tentar deixar claro para o leitor quais são as dificuldades que podem surgir nos cálculos de certos limites e quais são, de modo geral, os procedimentos usados para atacá-las.

Indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\infty - \infty$

Nesses casos, os procedimentos mais comumente usados são fatorações, racionalizações e multiplicação pelo conjugado, como veremos a seguir.

Exemplo 3.16

Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}.$$

Ao fazer $x = 4$ na expressão para desenvolvermos uma intuição inicial do que ocorre, somos levados a lugar nenhum: a expressão retorna $0/0$. Essa é a essência do trabalho que precisamos fazer nesse cálculo: manipular algebricamente tal expressão a fim de eliminar essa indeterminação e possibilitar que consigamos intuir com facilidade a respeito do que ocorre quando x se aproxima de 4. Podemos tentar usar a diferença de quadrados no denominador, reescrevendo-o como

$$(x - 4) = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2),$$

de modo que a expressão como um todo se torna

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

É importante que o leitor note alguns detalhes que foram utilizados nesse cálculo:

1. O passo central foi a fatoração da diferença de quadrados, que possibilitou reescrever a expressão de modo que, com a simplificação feita, a indeterminação $0/0$ que aparecia ao x se aproximar de 4 deixou de existir, tornando o limite trivial.
2. Pudemos cancelar o termo $(\sqrt{x} - 2)$ no numerador e no denominador porque ele de fato nunca se anula. Nunca fazemos $x = 4$ na expressão — tal valor sequer está no domínio da função. Queremos apenas entender o que ocorre quando estivermos infinitamente próximos de $x = 4$, porém, sem chegar exatamente nele.

3. No último passo, usamos o fato de que o limite da razão é a razão dos limites, de onde o que se segue é trivial, uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 4} (1) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} + 2) = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}) + \lim_{x \rightarrow 4} (2) = 2 + 2 = 4.$$

Exemplo 3.17

Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 + 3x - 18}.$$

Novamente, ao fazer $x \rightarrow 2$, nossa primeira intuição sempre é fazer logo $x = 2$ e avaliar a expressão o que, neste caso, nos leva novamente a $0/0$. Note, é claro, que $x = 2$ sequer faz parte do domínio da função — o ato de fazer $x = 2$ é apenas o primeiro passo intuitivo para tentar entender para aonde a função vai quando nos aproximamos de 2.

Podemos reescrever o numerador usando a fatoração da diferença de cubos e o denominador pode ser fatorado pelas suas raízes por meio do Teorema Fundamental da Álgebra:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 + 3x - 18} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{3(x - 2)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{3(x + 3)} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

Claro que o leitor poderia avaliar que tal expressão se aproxima de $4/5$ quando x se aproxima de 2 por meio de uma tabela, como fizemos nas primeiras seções deste capítulo.

x	$x^3 - 8$	$3x^2 + 3x - 18$	$(x^3 - 8)/(3x^2 + 3x - 18)$
1,5	-4,625	-6,75	0,6851851852
1,9	-1,141	-1,47	0,7761904762
1,99	-0,119401	-0,1497	0,7976018704
1,999	-0,011994001	-0,014997	0,7997600187
1,9999	-0,001199940001	-0,00149997	0,7999760002
1,99999	-0,0001199994	-0,0001499997	0,7999976
1,999999	-0,000011999994	-0,000014999997	0,79999976
1,9999999	-0,00000119999994	-0,00000149999997	0,7999999774

Tabela 3.6: Comparação entre os valores dos polinômios $x^3 - 8$, $3x^2 + 3x - 18$ e da razão entre eles, $\frac{x^3 - 8}{3x^2 + 3x - 18}$, à medida em que x se aproxima de 2.

Esse sempre será um mecanismo que nos permitirá avaliar um limite, mas o que queremos desenvolver aqui são procedimentos que nos possibilitem — sem uma

calculadora que nos permita montar uma tabela ou um software que nos proporcione plotar e avaliar o gráfico da função — encontrar o valor do limite usando apenas processos algébricos. As manipulações algébricas estarão, portanto, no cerne desse processo.

É válido ressaltar, novamente, que o trabalho de se calcular limites sem o auxílio de calculadoras, planilhas ou gráficos irá sempre exigir do leitor a arte do algebrista — manipular as expressões algébricas até que elas lhe digam o que você quer. É um trabalho que exigirá criatividade e prática, a fim de que seja possível identificar e reconhecer certos padrões em determinados tipos de expressões.

Exemplo 3.18

Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}.$$

É claro que $x = 0$ não faz parte do domínio da função em questão, nos levando em 0/0 caso façamos essa substituição. Procuramos fazer alguma manipulação algébrica que elimine tal indeterminação. Podemos usar a transformação do arco-metade e escrever que

$$1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Logo, nosso limite se torna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{(x/2)}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

onde, no último passo, usamos um resultado já construído anteriormente por nós no Exemplo 3.2, o qual atesta que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Caso o leitor se sinta mais confortável, use a variável auxiliar $u = \frac{x}{2}$ e note que $x \rightarrow 0$ implica $u \rightarrow 0$, de modo que, em tal variável, teremos o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 = \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u}\right)^2 = 1^2.$$

Note que, no último passo da manipulação acima, usamos a propriedade de que

o limite do produto de duas funções f e g é igual ao produto dos limites, isto é:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \right)^2.\end{aligned}$$

Existem alguns caminhos diferentes para resolvermos tal limite. Um deles consiste em fazer uma aproximação de primeira ordem para alguma função, visando eliminar a indeterminação. Ou seja, como teremos $x \rightarrow 0$, para ângulos pequenos, podemos usar que $\sin(x) \approx x$ e, usando a relação fundamental da trigonometria, chegamos a $\cos(x) \approx (1 - x^2)^{1/2}$. Usando também a aproximação binomial

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx \quad \text{para } x \ll 1,$$

chegamos a

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2. \quad (3.5)$$

Substituindo tal valor na expressão do limite, o leitor há de verificar que é imediata a obtenção do seu valor, concordando com o nosso cálculo anterior, que fornece o resultado de $1/2$.

A Equação (3.5) fornece os primeiros termos da expansão da função $f(x) = \cos(x)$ em série de Taylor, o que será estudado mais adiante.

Exemplo 3.19

Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$$

Fazendo $x \rightarrow \infty$ na função $f(x) = (\sqrt{x^2 + x} - x)$, somos levados a $\infty - \infty$, o que, em um primeiro momento, o leitor pode ser induzido a acreditar que o resultado tende a 0. Lembre-se, contudo, que ∞ não é um número, mas sim uma representação de um número arbitrariamente grande. É possível, desse modo, que um infinito seja maior ou menor do que outro, de tal forma que não podemos dizer que $\infty - \infty = 0$. A expressão $\infty - \infty$ é uma indeterminação.

Para avaliar o limite, portanto, devemos procurar manipular algebricamente a expressão a fim de eliminar tal indeterminação. Neste caso, multiplicaremos e dividiremos a expressão da função pelo seu conjugado, isto é, por $\sqrt{x^2 + x} + x$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \cdot \frac{(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + x} + x)}.$$

Agora, caso façamos $x \rightarrow \infty$, veremos que seremos levados a uma indeterminação diferente, do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que será o próximo caso que abordaremos. Uma manipulação útil nesse caso — como veremos na próxima seção — é dividir o numerador e o denominador por x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{1 + (1/x)} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Tentaremos dar um panorama geral ao leitor de quais são os procedimentos mais comuns e eficazes para atacar limites com indeterminações do tipo $0/0$ ou $\infty - \infty$, que é uma síntese dos exemplos resolvidos acima:

Fatoração: se houver polinômios, tente fatorar o numerador e o denominador para tentar buscar uma simplificação que elimine a indeterminação. Diferença de quadrados, de cubos, produtos notáveis e fatorações por raízes — usando o Teorema Fundamental da Álgebra — são ótimos recursos.

Racionalização e multiplicação pelo conjugado: sempre que houver raízes, pode ser um bom caminho multiplicar e dividir pelo conjugado, em cima e embaixo, a fim de tentar eliminar a indeterminação.

Transformações trigonométricas: sempre que houver expressões trigonométricas, é bastante útil conhecer algumas transformações clássicas, como do arco-dobro, arco-metade, relação fundamental da trigonometria. Reescrever a expressão usando essas identidades pode levar à eliminação da indeterminação no limite.

Expansão em série de Taylor: é a aproximação em primeira ordem que fizemos na segunda resolução do Exemplo 3.18. Costuma ser útil quando o limite envolve expressões trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais. Veremos em mais detalhes o formalismo por trás disso em seções futuras.

Por fim, é importante que o leitor note que não há fórmula fechada para se calcular um limite como existe a Fórmula de Bháskara para calcular raízes de uma equação do segundo grau. O cálculo de limites envolverá, essencialmente, criatividade, muita álgebra e a habilidade de reconhecer padrões. Os tópicos acima são uma síntese de quais tipos de abordagens costumam ser mais eficientes em casos das indeterminações que estamos aqui trabalhando, mas não há nenhuma garantia de que o limite poderá ser certamente calculado usando um — ou mais — desses processos. Como no caso do Exemplo 3.18, o caminho acabou sendo manipular a expressão para convertê-la em um outro limite que era conhecido por nós e, por meio dele, obter o resultado desejado.

Indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Para esse tipo de indeterminação existe um procedimento algébrico que costuma ser útil. Porém, em muitos casos, não será simples resolver o limite apenas usando manipulações. É bem proveitoso conhecer as taxas de crescimento relativas entre

certos tipos de funções clássicas, com o objetivo de entender quem cresce mais rápido, como veremos.¹

Exemplo 3.20

Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x}{x^3 + x^2 + 4}.$$

Fazendo $x \rightarrow \infty$, somos levados a $\frac{\infty}{\infty}$, que, novamente, é importante ressaltar que não é igual a 1. Lembre-se sempre de que ∞ não é um número; logo, qualquer expressão que o envolva deve ativar um alerta no leitor e avisá-lo de que aquilo possivelmente é uma indeterminação e precisa ser estudada com cautela.

Nesse caso, quando a expressão envolve apenas polinômios, um procedimento útil consiste em dividir o numerador e o denominador pelo termo de maior grau, como fizemos no Exemplo 3.19. Neste caso, o termo seria x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x}{x^3 + x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}} = \frac{5}{1} = 5,$$

onde usamos que todo limite do tipo $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x^3}$ vai a zero quando $x \rightarrow \infty$.

Note, no Exemplo 3.20, que apesar das duas expressões crescerem arbitrariamente quando $x \rightarrow \infty$, é como se o “infinito de cima ficasse 5 vezes maior do que o de baixo”. Isso ocorre porque o termo de maior grau do numerador e do denominador é o mesmo, ou seja, eles têm a mesma taxa de crescimento, exceto pelo fato de que o termo de maior grau do numerador está multiplicado pelo fator 5, enquanto o do denominador é multiplicado pelo fator 1. Essa razão fornece o limite para o qual a expressão tende quando x fica arbitrariamente grande.

Exemplo 3.21

Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}.$$

Nesse caso temos, novamente, fazendo $x \rightarrow \infty$, uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. O problema consiste em determinar qual função cresce mais rápido: $f(x) = x^3$ ou $g(x) = e^x$.

Como mostra o gráfico da Figura 3.10, para $x \rightarrow \infty$, a função e^x cresce muito mais rapidamente do que a função x^3 , de tal modo que a razão entre a última e

¹Ao longo dos exemplos com indeterminações desse tipo o leitor pode se sentir um pouco desconfortável, pois lançaremos mão, de forma aparentemente arbitrária, de alguns fatos sobre taxas de crescimento relativas entre funções. O objetivo é já familiarizar o leitor com tais conceitos, que serão estudados de modo formal no final do Capítulo 5, no estudo sobre Séries de Taylor.

a primeira tende a zero, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0.$$

Na verdade, o fato é mais geral: é possível mostrar que a função exponencial cresce mais rapidamente do que qualquer polinômio x^n , para qualquer n . Logo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0,$$

onde $p(x)$ é um polinômio de grau qualquer. Isso pode ser demonstrado usando série de Taylor ou pela regra de L'Hôpital, que será estudada após a introdução do Cálculo Diferencial.

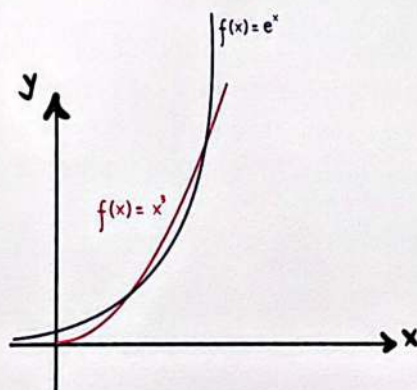


Figura 3.10: Crescimento da função exponencial versus cúbica.

De modo geral, as táticas comumente usadas nas indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ são:

Divisão pelo maior expoente: se as expressões envolvidas forem puramente polinomiais, dividir o numerador e o denominador pelo termo de maior grau pode ser um bom caminho.

Avaliar qual função cresce mais rápido: é importante conhecer os crescimentos relativos das funções x^n , e^x , $\ln(x)$, $x!$. Ter tais informações de antemão pode ser bem útil na hora de avaliar limites com indeterminação tipo $\frac{\infty}{\infty}$. O estudo detalhado comparativo dessas taxas de crescimento será feito após a apresentação da teoria completa das derivadas.

Indeterminações do tipo $0 \cdot \infty$

Indeterminações desse tipo podem fazer o leitor achar que o resultado dará zero, mas lembre-se: apesar do produto de qualquer número por zero ser zero, ∞ não é um número. Sendo assim, o que a expressão $0 \cdot \infty$ quer dizer é que temos um fator se

aproximando infinitamente de zero e outro crescendo arbitrariamente, de modo que é perfeitamente possível que tal resultado dê 1 ou dê realmente zero, caso o primeiro fator vá a zero mais rapidamente do que o segundo cresce, ou mesmo dar ∞ , caso o segundo fator cresça mais rapidamente do que o primeiro vai a zero. É preciso, portanto, avaliar a taxa de crescimento/decaimento de cada fator e compará-las.

Exemplo 3.22

Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 e^{-x}.$$

Fazendo $x \rightarrow \infty$, somos levados a $\infty \cdot 0$. Podemos reescrever tal limite como uma fração:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{e^x},$$

que nos leva à indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, de modo que podemos utilizar técnicas do tópico anterior, a dizer, comparação de taxas de crescimento.

Como apresentamos no Exemplo 3.21, a função exponencial e^x cresce mais rápido do que qualquer função potência x^n , de modo que tal limite vai a zero:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 e^{-x} = 0.$$

Exemplo 3.23

Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \tan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Fazendo $x \rightarrow \infty$, o argumento da tangente vai a zero, de modo que a tangente também o faz. Logo, teremos $\infty \cdot 0$.

É possível usar uma aproximação para a tangente, que, para ângulos pequenos, vale $\tan(\theta) \approx \theta$. Logo, podemos escrever que

$$\tan\left(\frac{1}{x}\right) \approx \frac{1}{x},$$

de modo que o limite se torna

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty,$$

ou seja, o limite não existe, mas é comum dizermos que ele vai para o infinito. Isso quer dizer que, no produto $x^2 \cdot \tan(\frac{1}{x})$, o termo quadrático cresce mais rapidamente do que o termo da tangente vai a zero, sendo dominante sobre este, fazendo com que o comportamento global da expressão seja crescente no limite de valores muito grandes de x .

As estratégias para resolver tais limites consistem em:

Transformação em fração: tentar reescrever o produto como um quociente, de modo a reescrever a indeterminação como $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$ e usar as técnicas do tópico anterior.

Aproximações de primeira ordem: fazer aproximações de primeira ordem para funções trigonométricas, como no caso da tangente, ou funções logarítmicas.

3.5.3 Indeterminações do tipo potência: 0^0 , ∞^0 ou 1^∞

Exemplo 3.24

Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

Ora, fazendo $x = 0$, somos levados à indeterminação $0/0$. Podemos reescrever a expressão como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)},$$

onde usamos as propriedades clássicas de logaritmos que dizem, respectivamente:

$$a^{\log_a(x)} = x \quad \text{e} \quad \log_a(x^n) = n \log_a(x).$$

Considere agora a função que aparece no expoente do número de Euler,

$$g(x) = x \ln(x) = \frac{\ln(x)}{1/x}.$$

Fazendo $x \rightarrow 0$, somos levados à $-\frac{\infty}{\infty}$, que é uma indeterminação já estudada por nós. Nesse caso, é preciso conhecer a taxa relativa de crescimento das funções em questão: a função $f(x) = 1/x$ cresce mais rapidamente do que a função $\ln(x)$?

A tabela abaixo mostra esse comportamento relativo.

x	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
0,1	10	-2,302585093
0,01	100	-4,605170186
0,001	1000	-6,907755279
0,0001	10000	-9,210340372
0,00001	100000	-11,51292546
0,000001	1000000	-13,81551056
0,0000001	10000000	-16,11809565
0,00000001	100000000	-18,42068074

Tabela 3.7: Comparação entre os valores das funções $x \mapsto \frac{1}{x}$ e $x \mapsto \ln(x)$ à medida em que x se aproxima de 0.

Desse modo, vemos que $\frac{1}{x}$ explode mais rapidamente do que $\ln(x)$ quando $x \rightarrow 0$, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = 0,$$

e, inserindo tal resultado no limite original, somos levados a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)} = 1.$$

O leitor poderia se perguntar: *mas como eu posso resolver isso sem precisar de rascunhar os valores nessa tabela?* Por hora, o objetivo é apenas mostrar como limites com indeterminação em expoentes, como 0^0 , podem ser transformados nas indeterminações já estudadas e desenvolvidos a partir daí. Comparar algebricamente taxas de crescimento de funções — que é o que precisaríamos fazer neste caso para não precisar das tabelas — será papel do Cálculo Diferencial, que será desenvolvido no próximo capítulo.

Note que um limite que cai nesse tipo de indeterminação, do tipo 1^∞ , foi aquele estudado no Exemplo 3.3, o limite que define o número de Euler e :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Tal limite será calculado posteriormente após o estudo das derivadas, de modo que não será preciso usar um argumento baseado em valores, como no exemplo anterior.

As estratégias para resolver limites com esses tipos de indeterminação são:

Transformação em fração: tentar reescrever as potenciações problemáticas como frações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ e usar as técnicas dos tópicos anteriores.

Tomar o logaritmo natural: se tivermos que calcular o limite de uma função $h(x) = f(x)^{g(x)}$, podemos tomar o logaritmo natural e converter a potência em um produto: $\ln(f(x)^{g(x)}) = g(x) \cdot \ln(f(x))$.

3.5.4 Teorema do Confronto

Vamos agora introduzir um importante teorema que será bastante útil para o cálculo de certos limites.

Teorema do Confronto

Teorema. Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ três funções definidas em um intervalo aberto (a, b) , com $x_0 \in (a, b)$. Se em tal intervalo tivermos

$$h(x) < f(x) < g(x) \quad \text{e se} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L,$$

então $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

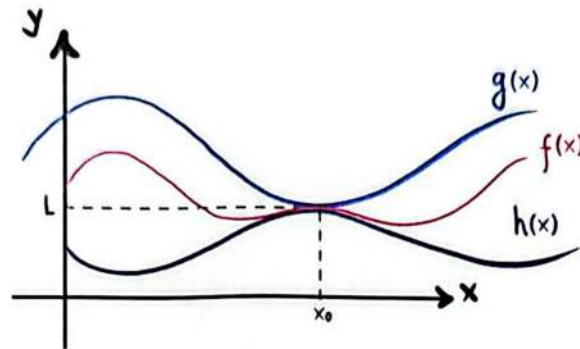


Figura 3.11: Teorema do Confronto.

O que tal teorema diz é que, se uma função $f(x)$ estiver aprisionada entre duas funções $g(x)$ e $h(x)$, com ambas tendendo ao mesmo limite L quando $x \rightarrow x_0$, então a função intermediária $f(x)$ também deve ter o mesmo limite. Esse teorema é, em algumas literaturas, conhecido como “*Teorema do Sanduíche*”, o que retrata de modo intuitivo sua essência: se $f(x)$ estiver *sanduichada* entre $h(x)$ e $g(x)$, com o limite dessas duas últimas tendendo para o mesmo número quando x se aproxima de um valor específico x_0 , o limite de $f(x)$ tenderá para este mesmo número quando $x \rightarrow x_0$. A Figura 3.11 evidencia, geometricamente, a validade do teorema. Uma demonstração rigorosa pode ser feita usando a definição formal de limites, que será vista na próxima seção.

O limite do Exemplo 3.2 pode ser computado, algebricamente, por meio de um argumento muito elegante com base neste teorema.

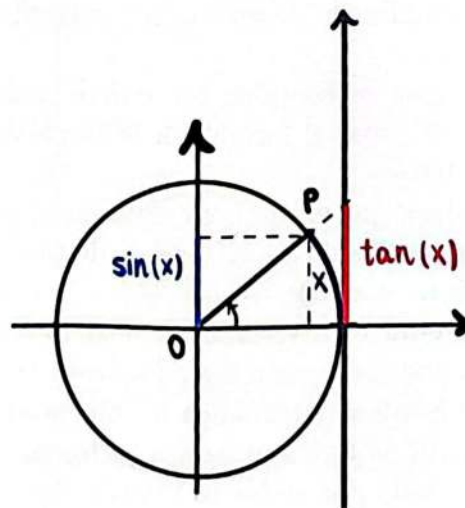


Figura 3.12: Ciclo trigonométrico e o Teorema do Confronto.

Note que, pelo ciclo trigonométrico da Figura 3.12, para qualquer ângulo x no primeiro quadrante, considerando seu valor em radianos, teremos sempre:

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x).$$

Dividindo a desigualdade por $\sin x$ e depois invertendo-a, somos levados a

$$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x),$$

de modo que a função cujo limite queremos calcular fica aprisionada entre as funções $f(x) = 1$ e $g(x) = \cos(x)$. Contudo, é imediato que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1,$$

de modo que, pelo Teorema do Confronto, devemos também ter:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

uma vez que tal função está sanduichada entre as outras duas.

3.6 Definição Formal de Limite

Como já pontuamos, de modo bastante intuitivo, dizer que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \tag{3.6}$$

é dizer que $f(x)$ pode se tornar tão próximo de L quanto se queira, bastando, para isso, tornar x suficientemente próximo de x_0 .

Contudo, o que significa *tão próximo quanto se queira* ou *suficientemente próximo*? Estes não parecem ser termos exatamente matemáticos e, de fato, é possível definir o limite com mais formalidade do que fizemos até aqui, “matematizando” essas expressões.

Adianto ao leitor que essa seção pode ser pulada numa primeira leitura. Ela entrará em um nível mais rigoroso e formal da Matemática, interessante para um matemático ou físico-matemático.

A Equação (3.6) quer dizer que existe uma vizinhança em torno de $y = L$ tal que, para todos os pontos da vizinhança de x_0 , a imagem de tais pontos está na vizinhança de L . A Figura 3.13 ilustra tal conceito.

Note que podemos estreitar essa vizinhança, fazendo os valores de $f(x)$ ficarem ainda mais próximos de L , bastando, para isso, deixar os valores de x suficientemente próximos de x_0 . Podemos definir a vizinhança de um ponto como sendo o conjunto de todos os pontos que distam no máximo de um certo valor daquele ponto. Ou seja, a vizinhança de L pode ser dada por todos os pontos $f(x)$ tais que

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon, \tag{3.7}$$

em que ε é um parâmetro de nossa escolha que determina o tamanho de tal vizinhança. A segunda imagem da Figura 3.13 mostra uma vizinhança menor, portanto, para um parâmetro ε menor do que o da primeira imagem da figura. Podemos também escrever a Equação (3.7) como sendo

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \tag{3.8}$$

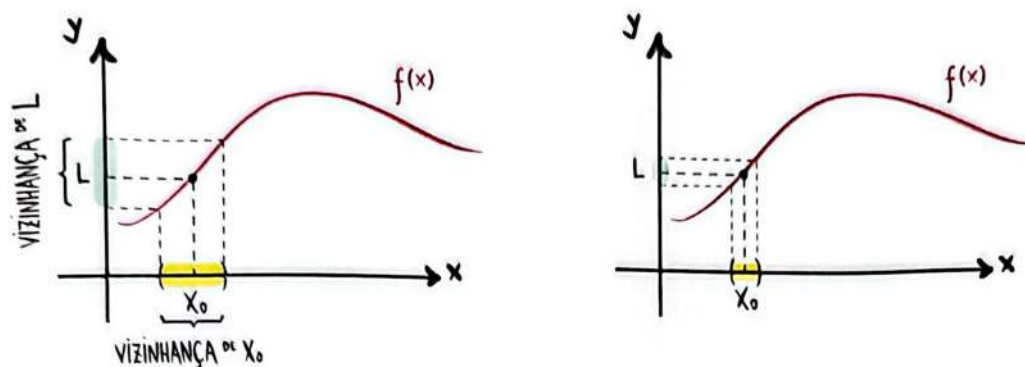


Figura 3.13: Vizinhança de um ponto.

visto que o módulo mede a distância de um ponto a outro.

De modo análogo, a vizinhança do ponto x_0 será composta por todos os pontos x que distarem no máximo δ de tal ponto, isto é

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad (3.9)$$

ou, caso o leitor prefira:

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad (3.10)$$

em que δ é o parâmetro de nossa escolha que determina o tamanho da vizinhança.

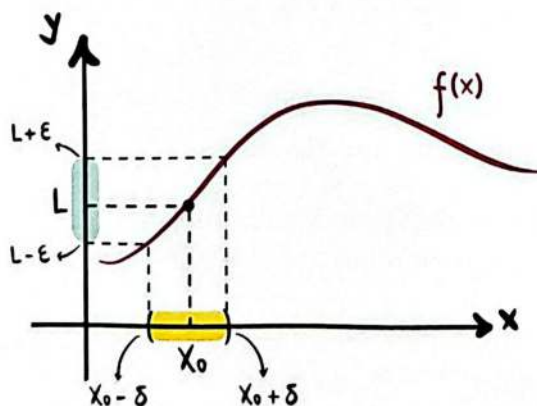


Figura 3.14: Se o limite existe então pontos da vizinhança de x_0 são mapeados em pontos da vizinhança de L .

Ora, quando definimos a notação da Equação (3.6), dissemos que o significado matemático de tal expressão era que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto quisermos, bastando para isso tornar os valores de x suficientemente próximos de x_0 . O que isso quer dizer, de forma matematicamente rigorosa, é que, escolhendo um certo ϵ — ou seja, o quão próximo queremos que os valores de $f(x)$ fiquem de L — sempre conseguimos encontrar um δ — que delimita o quão próximo os

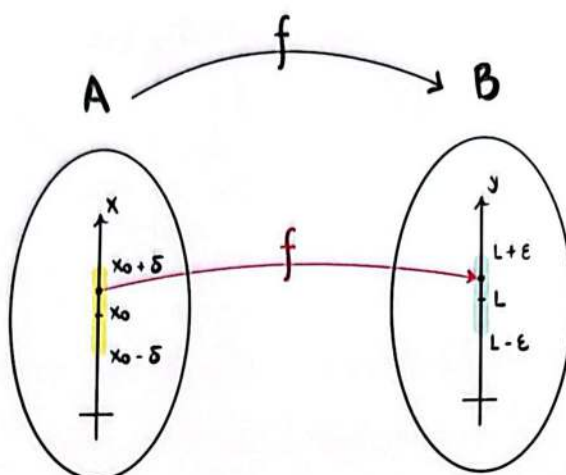


Figura 3.15: A vizinhança A de x_0 é mapeada na vizinhança B de L pela função f .

valores de x devem estar de x_0 —, tal que as imagens da vizinhança de x_0 determinadas pelo parâmetro δ estarão sempre na vizinhança de L determinadas pelo parâmetro ε .

As Figuras 3.14 e 3.15 são diagramas que tentam deixar clara tal definição: para cada valor do parâmetro ε temos sempre que ser capazes de encontrar um valor de δ tal que os pontos x dados por $0 < |x - x_0| < \delta$ são sempre levados nos pontos $f(x)$ tais que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ou seja, podemos sempre escolher o quão próximo $f(x)$ estará de L — o valor de ε — bastando, para isso, deixar x suficientemente próximo de x_0 — que é determinado pelo valor de δ . Se isso ocorre, então dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Definição 3.7: Definição formal de limite

Sendo $f(x)$ uma função definida em algum intervalo que contenha o número x_0 , exceto possivelmente no próprio x_0 , dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, houver $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Esse formalismo de épsilons e deltas é um pouco abstrato em um primeiro momento, mas é o que permite definir, de forma matematicamente rigorosa, os limites.

Exemplo 3.25

Considere a função $f(x) = 2x + 5$. Mostre que $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 13$.

Considere $\varepsilon > 0$ tal que $|f(x) - 13| < \varepsilon$, ou seja,

$$|2x - 8| < \varepsilon. \quad (3.11)$$

Queremos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que, se x distar no máximo de δ do número 4 então $f(x)$ distará no máximo de ε do número 13, ou seja:

$$|x - 4| < \delta \implies |f(x) - 13| < \varepsilon.$$

Ora, desenvolvendo a Equação (3.11), temos:

$$\begin{aligned} |2x - 8| &< \varepsilon \\ 2|x - 4| &< \varepsilon \\ |x - 4| &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Escolhendo $\delta = \varepsilon/2$, vemos que, para qualquer δ que escolhermos — por menor que ele seja — o fato de que $|x - 4| < \delta$ implica em $|f(x) - 13| < \varepsilon$, como queríamos demonstrar.

Essa é a forma rigorosa de provar que $f(x)$ pode estar tão próximo quanto quisermos de 13, bastando, para isso, fazer com que x esteja suficientemente próximo de 4. Esse suficientemente próximo, de forma rigorosa, significa dizer que, para $f(x)$ distar no máximo de ε de 13, então x deve distar no máximo de $\delta = \varepsilon/2$ de 4.

Ou seja, fixando um valor de ε — escolhendo o quão próximo se quer que $f(x)$ fique de 13 — temos de imediato o valor de $\delta = \varepsilon/2$ que nos diz o quão próximo x deve estar de 4 para que isso aconteça.

É também por meio de tal definição formal de limites que podemos demonstrar todas as propriedades de limites que listamos na Seção 3.5, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.26

Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Suponha que existam os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M. \quad (3.12)$$

Queremos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M,$$

isto é, queremos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon.$$

Ora, note que

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|, \quad (3.13)$$

em que, no último passo, usamos a desigualdade triangular.

Sabemos que podemos tornar $f(x)$ tão próxima de L quanto quisermos, dada a Equação (3.12). Logo, vamos deixar $f(x)$ distar no máximo de $\frac{\varepsilon}{2}$ de L :

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.14)$$

Naturalmente, para que isso ocorra, x deve distar no máximo de δ_f de a , ou seja, pela definição formal aplicada à existência do limite em questão, existe δ_f tal que, se $0 < |x - a| < \delta_f$ então $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

O mesmo vale para a função $g(x)$, de modo que podemos fazê-la distar no máximo $\varepsilon/2$ de M :

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.15)$$

bastando, para isso, deixar x distar no máximo δ_g de a :

$$0 < |x - a| < \delta_g \implies |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somando as desigualdades das Equações (3.14) e (3.15), tem-se $|f(x) - L| + |g(x) - M| < \varepsilon$, que, pela Equação (3.13), nos leva a

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon,$$

isto é, podemos fazer a função $f(x) + g(x)$ distar no máximo ε de $(L + M)$, bastando, para isso, que x diste no máximo δ_f ou δ_g de a . Pegando δ como sendo o menor desses dois valores, a condição se escreve:

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon,$$

como queríamos demonstrar.

Podemos, além disso, estender de modo formal as definições de limites laterais usando o mesmo princípio. A ideia consiste em considerar a vizinhança apenas à direita ou à esquerda de x_0 .

Definição 3.8: Definição formal de limite lateral

Sendo $f(x)$ uma função definida em algum intervalo que contenha o número x_0 , exceto possivelmente no próprio x_0 , dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, houver $\delta > 0$ tal que

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

O limite lateral à esquerda pode ser definido de modo análogo. Com essas definições mais rigorosas a respeito dos limites, é possível fazer diversas demonstrações de propriedades e teoremas sobre limites.

Exemplo 3.27

Demonstre o Teorema do Confronto.

Nossas hipóteses são que

$$g(x) \leq h(x) \leq f(x), \quad \text{para todo } x \in (a, b),$$

e que os limites de f e g quando $x \rightarrow c$ existem e coincidem para $c \in [a, b]$, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L.$$

A partir disso, queremos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L.$$

Ora, da definição formal de limite para a função f tem-se que, dado ε_1 , existe δ_1 tal que

$$0 < |x - c| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \varepsilon_1,$$

isto é,

$$L - \varepsilon_1 < f(x) < L + \varepsilon_1 \text{ se } x \text{ distar no máximo } \delta_1 \text{ de } c. \quad (3.16)$$

O mesmo vale para a função g , isto é, dado ε_2 , existe δ_2 tal que

$$0 < |x - c| < \delta_2 \implies |g(x) - L| < \varepsilon_2,$$

isto é,

$$L - \varepsilon_2 < g(x) < L + \varepsilon_2 \text{ se } x \text{ distar no máximo } \delta_2 \text{ de } c. \quad (3.17)$$

Logo, pelas Equações (3.16) e (3.17) e considerando que $h(x)$ está aprisionada entre f e g , tem-se:

$$L - \varepsilon_1 < g(x) \leq h(x) \leq f(x) < L + \varepsilon_2.$$

Escolhendo ε como sendo o maior dos dois valores $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, podemos escrever que

$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon,$$

sendo a condição para isso que $0 < |x - c| < \delta$, em que δ é o menor dos valores δ_1 e δ_2 . ■

3.7 Problemas

Seção 3.1 – Intuição

Problema 3.1 (*Quem vai a zero mais rápido*). Estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$.

Problema 3.2 (*Variação do limite trigonométrico clássico*). Estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$.

Problema 3.3 (*Limite trigonométrico*). Estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$.

Problema 3.4 (*Brincando com o infinito*). Estime o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

Seção 3.2 – Limites Laterais

Problema 3.5 (*Função racional*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$.

Problema 3.6 (*Função sinal*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2}}$.

Seção 3.3 – Limites infinitos

Problema 3.7 (*Limite infinito*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$.

Problema 3.8 (*Mais de uma assíntota*). Encontre as assíntotas horizontais da função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Problema 3.9 (*Mais assíntotas*). Encontre as assíntotas da função $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

Problema 3.10 (*Assíntotas da hipérbole*). Encontre as assíntotas da curva descrita pela equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Seção 3.4 – Continuidade

Problema 3.11 (*Provando continuidade*). Mostre que a função $f(x): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada pela lei $f(x) = \sqrt{x}$, é contínua no intervalo $(0, +\infty)$.

Problema 3.12 (*Força na mola*). Uma mola ideal segue a Lei de Hooke, onde a força exercida é proporcional à sua distensão x , dada por $F = -kx$. Se adicionarmos um termo de resistência do ar, a força resultante na caixa presa à mola pode ser modelada por $F = -kx + \alpha x^3$. Avalie em quais condições certamente existe algum valor de x no intervalo $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ onde há um ponto de equilíbrio.

Problema 3.13 (*Quando o teorema falha*). Considere a função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 2, \\ x^2 - 4, & x \geq 2. \end{cases}$$

Podemos garantir, pelo Teorema de Bolzano, que $f(x)$ possui uma raiz em $[1, 3]$?

Seção 3.5 – Propriedades dos limites

Problema 3.14 (*Termos dominantes*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x + 7}{7x^4 + x^2 - 3}$.

Problema 3.15 (*Raízes estranhas*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{3x^2 + 4}}{2x + 1}$.

Problema 3.16 (*Limite trigonométrico*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$.

Problema 3.17 (*Limite logarítmico clássico*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Problema 3.18 (*Oscilação com decaimento*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Seção 3.6 – Definição Formal de Limite

Problema 3.19 (*Unicidade do limite*). Mostre que, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$, então $M = N$.

3.8 Exercícios

Seção 3.2 – Limites Laterais

Exercício 3.20 (*Logaritmo lateral*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$.

Exercício 3.21 (*Função racional*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x}$.

Exercício 3.22 (*Função racional com simplificação*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Exercício 3.23 (*Exponencial lateral negativa*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$.

Seção 3.3 – Limites infinitos

Exercício 3.24 (*Polinômio dominante no infinito*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1}$.

Exercício 3.25 (*Assíntota oblíqua por divisão de polinômios*). Determine a assíntota oblíqua da função $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$.

Exercício 3.26 (*Assíntota horizontal de função racional*). Determine a assíntota horizontal da função $f(x) = \frac{5x - 2}{x + 3}$.

Exercício 3.27 (*Assíntota vertical de função racional*). Determine a assíntota vertical da função $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 4}$.

Exercício 3.28 (*Assíntota horizontal de função racional*). Determine a assíntota horizontal da função $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{2x^2 - 3x + 7}$.

Exercício 3.29 (*Comportamento de função logarítmica negativa*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^2)$.

Seção 3.4 – Continuidade

Exercício 3.30 (*Localizando raízes em um polinômio cúbico*). Demonstre que a função $f(x) = x^3 - 2x - 5$ possui pelo menos uma raiz no intervalo $[1, 3]$.

Exercício 3.31 (*Funções trigonométricas e polinomiais*). Mostre que a função $f(x) = \sin(x) - x^2$ admite pelo menos uma raiz no intervalo $[0, 1]$.

Exercício 3.32 (*Intersecção de funções exponenciais e trigonométricas*). Mostre que a equação $e^x = \cos(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0, 1]$.

Seção 3.5 – Propriedades dos limites

Exercício 3.33 (*Indeterminação $\frac{0}{0}$ com conjugado*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Exercício 3.34 (*Indeterminação $\infty - \infty$*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + x} - x)$.

Exercício 3.35 (*Confronto com função oscilante*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercício 3.36 (*Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 - x}$.

Exercício 3.37 (*Confronto com seno e módulo*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercício 3.38 (*Indeterminação $0 \cdot \infty$ com exponencial*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$.

Exercício 3.39 (*Substituição trigonométrica*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi}$.

Exercício 3.40 (*Confronto com seno e quadrado*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2}$.

Seção 3.6 – Definição Formal de Limite

Exercício 3.41 (*Propriedade fundamental dos limites*). Mostre que, se f e g são duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$, então a função $f(x) \cdot g(x)$ também é contínua neste intervalo.

Exercício 3.42 (*Limite dentro da função*). Mostre que, se f e g são duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$ com $x_0 \in (a, b)$, então vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right).$$

3.9 Resoluções dos Problemas

Problema 3.1

Podemos simplesmente observar que o numerador, x^2 , cresce mais rapidamente do que o denominador x , de modo que, quando $x \rightarrow 0$, o numerador vai a zero muito mais rapidamente, o que deve fazer o limite ser nulo. Esse tipo de raciocínio — de comparar taxas de crescimento para estimar para onde o limite deve ir — deve ser claro e usual para o leitor. Essa intuição muitas vezes nos ajuda a direcionar as manipulações algébricas que faremos para calcular um certo limite.

Claro que este é um problema simples e poderíamos desenvolver algebricamente a expressão para obter o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

onde pudemos dividir o numerador e o denominador por x uma vez que sempre temos $x \neq 0$, por mais próximo de zero que ele esteja.

Problema 3.2

Conhecemos o resultado do limite trigonométrico clássico:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Uma das abordagens algébricas que fizemos para estimar tal limite foi fazer a aproximação do seno para ângulos pequenos $\sin(\theta) \approx \theta$. Fazendo isso, neste caso, teríamos que $\sin(5x) \approx 5x$, de modo que o limite se tornaria

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} \approx \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} = 5,$$

que é o valor exato de tal limite.

Problema 3.3

Podemos aqui também usar a aproximação trigonométrica clássica para ângulos pequenos, que diz que, para x pequeno — que é o nosso caso, uma vez que $x \rightarrow 0$ — então, tem-se: $\sin(x) \approx \tan(x) \approx x$, para x em radianos. Logo, teremos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} \approx \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1,$$

que fornece o mesmo resultado do limite clássico anteriormente estudado, de $\frac{\sin(x)}{x}$ quando $x \rightarrow 0$. Como para ângulos pequenos o seno e a tangente são muito próximos, é de esperar que esses dois limites tenham o mesmo comportamento.

Problema 3.4

Fazendo $x \rightarrow \infty$, a expressão que teríamos seria $\infty - \infty$ que, em um primeiro momento, aparenta dar zero, mas é, na verdade, uma indeterminação. O que temos é a diferença de dois números que crescem arbitrariamente, sendo que um deles pode ser bem maior ou bem menor do que o outro.

Vamos tentar eliminar a indeterminação, multiplicando e dividindo a expressão do limite que se quer calcular pelo seu conjugado:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} \\ &= 0,\end{aligned}$$

onde, no último passo, notamos que o limite tem que ser zero, uma vez que o denominador fica arbitrariamente grande e o numerador é fixo, logo, para valores cada vez maiores de x , o valor da expressão ficará cada vez mais próximo de zero.

*Seção 3.2 - Limites Laterais***Problema 3.5**

Ora, calculemos primeiro o limite à direita:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Contudo, ao calcular o limite à esquerda, chegamos a um impasse

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} = ?$$

Ora, o domínio da função $f(x) = \sqrt{x}$ é o conjunto dos reais positivos. Logo, a função sequer está definida para valores negativos de x , o que torna inexistente o seu comportamento à medida que nos aproximamos de x pela esquerda. Somos levados a concluir que o limite à esquerda não existe e o limite, como um todo, portanto, também não existe.

A função precisa estar definida nos dois lados de um certo ponto se quisermos calcular os limites laterais.

Problema 3.6

A função $g(x) = \sqrt{x^2}$ pode ser escrita como uma função definida por partes, isto é:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Logo, a função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$ é escrita como:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Note que a função dá um salto em $x = 0$, de tal modo que os limites laterais são imediatos, isto é

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1.$$

Logo, como os limites laterais não coincidem, conclui-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2}} \text{ não existe.}$$

Seção 3.3 – Limites infinitos

Problema 3.7

Fazendo $x \rightarrow \infty$ na função $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$, somos levados à indeterminação $\infty - \infty$. Multipliquemos o numerador e o denominador pelo seu conjugado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Problema 3.8

Para procurar assíntotas horizontais, queremos avaliar o que ocorre com a expressão quando $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$. Calculemos tais limites:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (1/x^2)}} = 1.$$

Logo, a reta $y = 1$ é assíntota horizontal da função. Calculando o outro limite temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + (1/x^2)}} = -1,$$

onde, na manipulação de dividir por x o numerador e o denominador, tivemos que ter o cuidado de inserir $-x$ dentro da raiz quadrada, uma vez que x é negativo, essa é a razão de sobrar o termo -1 no numerador. Logo, concluímos que $y = -1$ também é assíntota horizontal de $f(x)$. Sugiro ao leitor plotar em um software o gráfico de $f(x)$ para visualizar o seu comportamento quando $x \rightarrow \pm\infty$.

Problema 3.9

Para procurar assíntotas horizontais façamos $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty,$$

de modo que a função não possui assíntota horizontal para $x \rightarrow \infty$. Um cálculo análogo mostra também que o limite, quando $x \rightarrow -\infty$, também não converge para um número finito, de modo que também não há assíntota horizontal.

Procuramos assíntotas verticais, isto é, quais são os valores de x_0 , finitos, que fazem o limite explodir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(x + \frac{1}{x} \right) = \pm \infty,$$

nesse caso, é fácil ver que $x_0 = 0$ cumpre esse papel, pois faz o segundo termo do parênteses ir para infinito. Logo, a única assíntota da função é o próprio eixo y , isto é, a reta $x = 0$.

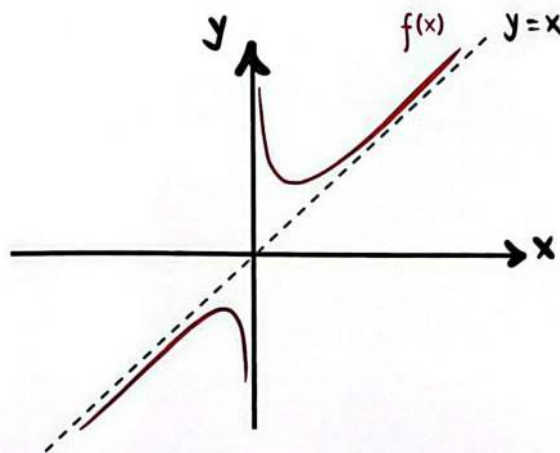


Figura 3.16: Função com assíntota oblíqua.

Quer dizer, será que ela não possui nenhuma assíntota oblíqua? Isto é, alguma reta do tipo $y = ax + b$ tal que, à medida que $x \rightarrow \pm\infty$, os valores de $f(x)$ se aproximam dos valores da reta? Ou, caso prefira, queremos que o limite de $[f(x) - (ax + b)]$ vá a zero quando $x \rightarrow \infty$. Vejamos se é possível achar a e b no limite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - (ax + b) \right) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x(1 - a) + \frac{1}{x} + b \right) &= 0. \end{aligned}$$

Ora, para que o limite vá a zero, é fácil ver que precisamos ter $b = 0$ e $a = 1$. Isto é, a reta $y = x$ é assíntota oblíqua da função $f(x)$: ela também funciona como uma parede invisível para a qual os valores de $f(x)$ se aproximam quando $x \rightarrow \pm\infty$, como o seu gráfico, que aparece na Figura 3.16, deixa claro.

Note, neste caso, que na expressão

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - a),$$

não teremos uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$, uma vez que o valor de a não tende a 1, mas foi escolhido para ser exatamente 1. Neste caso, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot 0,$$

e, por maior que seja o valor de x , um número vezes zero será sempre igual a zero.

Problema 3.10

Primeiro, vamos tentar reescrever a equação da hipérbole como uma função. Isolando o y , chegamos a

$$y(x) = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

sendo que a solução positiva fornece um ramo da hipérbole e a solução negativa o outro.

Ora, se x é muito grande, o termo subtraído dentro da raiz fica desprezível se comparado com x^2 , ou seja, $\sqrt{x^2 - a^2} \approx \sqrt{x^2} = x$ para $x \rightarrow \infty$, isto é:

$$\pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \approx \pm \frac{b}{a} x.$$

Logo, vemos que, quando $x \rightarrow \pm\infty$, os valores de y da hipérbole descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

se aproximam dos valores das retas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Estas duas retas são, portanto, assíntotas oblíquas da hipérbole.

Seção 3.4 - Continuidade

Problema 3.11

Considere um valor de x_0 qualquer tal que $x_0 \in (0, +\infty)$. Nesse caso, os limites laterais de $f(x) = \sqrt{x}$ quando $x \rightarrow x_0$ são:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \sqrt{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \sqrt{x_0 + \Delta x} = \sqrt{x_0},$$

em que $\Delta x > 0$. O limite à esquerda é

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \sqrt{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \sqrt{x_0 - \Delta x} = \sqrt{x_0}.$$

Logo, como os limites laterais existem e coincidem, o limite existe, isto é

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

Naturalmente, tem-se $f(x_0) = \sqrt{x_0}$, de tal modo que, como o limite coincide com o valor da função, ela é contínua em x_0 . Como não fizemos nenhuma suposição a respeito de x_0 , exceto o fato de que $x_0 \in (0, \infty)$, então a função é contínua em todo este intervalo.

Problema 3.12

O ponto de equilíbrio é aquele no qual $F = 0$, isto é, $F(x) = -kx + \alpha x^3 = 0$. Avaliemos quanto vale F nos extremos do intervalo citado, ou seja:

$$F(x_0 - 1) = -k(x_0 - 1) + \alpha(x_0 - 1)^3 = (x_0 - 1)(\alpha(x_0 - 1)^2 - k),$$

$$F(x_0 + 1) = -k(x_0 + 1) + \alpha(x_0 + 1)^3 = (x_0 + 1)(\alpha(x_0 + 1)^2 - k).$$

O Teorema de Bolzano nos garante que, se $F(x_0 - 1) \cdot F(x_0 + 1) < 0$, então certamente há ao menos algum valor de $x \in (x_0 - 1, x_0 + 1)$ tal que $F(x) = 0$. Ora, para que isso ocorra, vamos impor a condição exigida pelo teorema, isto é, que $F(x_0 - 1) \cdot F(x_0 + 1) < 0$:

$$(x_0 - 1)(\alpha(x_0 - 1)^2 - k)(x_0 + 1)(\alpha(x_0 + 1)^2 - k) < 0.$$

Logo, para valores de x_0 , α e k que satisfaçam tal desigualdade, certamente haverá um ponto no qual $F(x) = 0$ para x entre $(x_0 - 1)$ e $(x_0 + 1)$.

Problema 3.13

O leitor mais ingênuo avaliaria que $f(1) = -2$ e que $f(3) = 5$, de tal modo que $f(1) \cdot f(3) < 0$ e, portanto, o Teorema de Bolzano garante que há pelo menos um valor de $x \in (1, 3)$ tal que $f(x) = 0$. Isso, contudo, só vale se garantirmos que f é contínua no intervalo $(1, 3)$, o que não ocorre neste caso, uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x),$$

como o leitor pode facilmente verificar. Logo, como a função dá um salto em $x = 2$ — um ponto no intervalo $(1, 3)$ — nada pode nos garantir que, de fato, ela zera ao menos uma vez em tal intervalo: o teorema não se aplica neste caso.

Seção 3.5 – Propriedades dos limites

Problema 3.14

Dividindo o numerador e o denominador pelo termo de maior grau, no caso, x^4 , ter-se-á

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x + 7}{7x^4 + x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{x^3} + \frac{7}{x^4}}{7 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}} = \frac{3}{7},$$

em que os limites do tipo $\frac{1}{x^n}$, com $n \geq 1$, vão a zero quando $x \rightarrow \infty$.

Perceba como os coeficientes dos termos dominantes, neste caso, do termo x^4 , são os que determinam o valor do limite.

Problema 3.15

Fazendo $x \rightarrow \infty$ na expressão, somos levados à indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$. Vamos tentar a abordagem de dividir o numerador e o denominador pelo termo de maior grau, ou seja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{3x^2 + 4}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{3 + \frac{4}{x^2}}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$

onde usamos que todo limite do tipo $\frac{1}{x^n}$, com $n \geq 1$, vai a zero quando $x \rightarrow \infty$.

Problema 3.16

Vamos usar a transformação do arco-metade $(1 - \cos(x)) = 2 \sin^2(x/2)$, de modo que podemos reescrever o limite como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right) \\ &= 1 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

onde usamos, na penúltima linha, o fato de que o limite do produto de duas funções é o produto dos limites e, na última, usamos o resultado do limite trigonométrico do Exemplo 3.2.

Problema 3.17

Vamos calcular esse limite usando o Teorema do Confronto. Para isso, convido o leitor a plotar os gráficos das funções $f(x) = \ln(x+1)$, $g(x) = x$ e $h(x) = \frac{x}{x+1}$. A Figura 3.17 mostra os três gráficos.

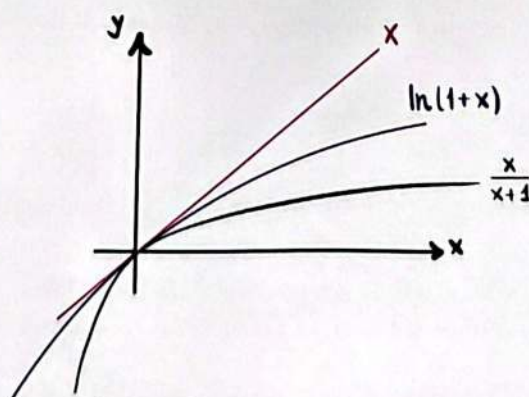


Figura 3.17: O Teorema do Confronto para o limite logarítmico clássico.

Como o gráfico evidencia, vemos que

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x.$$

Dividindo a desigualdade por x , temos

$$\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

E, nos extremos, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Logo, pelo Teorema do Confronto, a função aprisionada deve ter o mesmo limite, ou seja:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Esse é um resultado que será bastante importante no estudo de derivadas exponenciais e logarítmicas.

Problema 3.18

É interessante que o leitor sempre tenha alguma intuição inicial antes de iniciar os procedimentos algébricos do cálculo de um limite. Nesse caso, temos o produto de um termo que oscila entre -1 e 1 , o seno, por um termo que vai de 0 a ∞ de forma quadrática. É de se esperar que, no limite em que $x \rightarrow 0$, o produto de algo que vai a zero por algo que oscila de forma limitada deve ser zero, ou seja, estimamos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Vamos usar o Teorema do Confronto para provar isso. Inicialmente, tem-se:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1.$$

Multiplicando a desigualdade por x^2 , temos

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

Mas os limites dos extremos são imediatos, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0,$$

de tal modo que a função aprisionada entre essas duas deve ter o mesmo limite, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Seção 3.6 – Definição Formal de Limite

Problema 3.19

Suponha, por absurdo, que $L \neq M$. Sem perda de generalidade, suponha que $L < M$. Defina:

$$\varepsilon_0 = \frac{M - L}{2} > 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, pela definição de limite, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \varepsilon_0.$$

Da mesma forma, como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$, pela definição de limite, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |f(x) - M| < \varepsilon_0.$$

Agora, defina δ como sendo o menor dos valores de δ_1 e δ_2 , isto é, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Escolha x tal que $0 < |x - a| < \delta$. Então, ao mesmo tempo:

$$|f(x) - L| < \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad |f(x) - M| < \varepsilon_0.$$

Ou seja:

$$f(x) \in (L - \varepsilon_0, L + \varepsilon_0) = \left(\frac{3L - M}{2}, \frac{L + M}{2} \right),$$

$$f(x) \in (M - \varepsilon_0, M + \varepsilon_0) = \left(\frac{M + L}{2}, \frac{3M - L}{2} \right).$$

No entanto, esses dois intervalos são disjuntos, pois a distância entre seus centros é $(M - L)$ e o comprimento total de cada intervalo é $(M - L)$. Logo, $f(x)$ não pode pertencer a ambos ao mesmo tempo, o que é uma contradição.

Portanto, nossa suposição de que $L \neq M$ está errada. Concluimos que $L = M$ e o limite em um ponto é, portanto, único.

Capítulo 4

Derivadas: Cálculo e Técnicas

Já tivemos uma ampla e robusta discussão a respeito do conceito e da essência do Cálculo Diferencial — o cálculo de derivadas — no Capítulo 2. A partir de agora, tendo todo o aparato e as ferramentas do cálculo de limites, poderemos nos aprofundar e detalhar melhor este conceito.

4.1 Definição

Recapitulando a discussão feita no Capítulo 2, o objetivo central do Cálculo Diferencial é o de calcular a inclinação — o coeficiente angular — da reta que tangencia uma curva f em um ponto qualquer x .

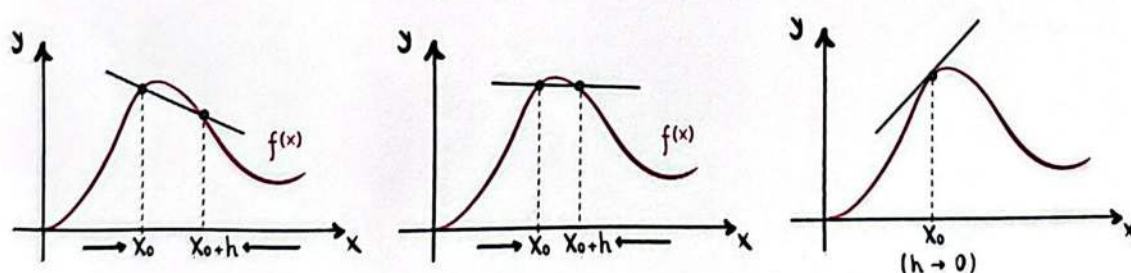


Figura 4.1: O limite em que a reta secante se torna tangente.

É conhecida a fórmula da Geometria Analítica que possibilita o cálculo do coeficiente angular de uma reta, dados dois pontos (x_0, y_0) e (x, y) que pertencem à reta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad (4.1)$$

e que, aplicada à função f nos pontos x e $x + h$, fornece

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

que, como mostra a Figura 4.1, tal valor fornece o coeficiente angular da reta secante à curva, passando pelos pontos $(x, f(x))$ e $((x+h), f(x+h))$. Tal reta, contudo, se torna a tangente à curva no ponto x no limite em que $h \rightarrow 0$, como mostra a Figura 4.1.

Definição 4.1: Derivada

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I que contém o ponto x . Dizemos que a **derivada de f no ponto x** existe se o seguinte limite existe e é finito:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Esse limite, quando existe, é chamado de derivada de f em x e fornece o coeficiente angular da reta que tangencia f em tal ponto.

Agora que já estudamos os limites em detalhes, é importante destacar que, sendo a derivada o cálculo de um limite, ela só existirá se os limites laterais existirem, coincidirem e resultarem em um valor finito, que são as condições de existência de um limite que pontuamos no capítulo anterior. Nesse ponto, após o extenso estudo sobre limites, é interessante que o leitor volte nos problemas 2.4–2.7 do Capítulo 2 e refaça-os, lendo posteriormente sua resolução, sob a ótica atual.

Exemplo 4.1

Calcule, por definição, a derivada da função $f(x) = x^2$.

Esse exemplo já foi resolvido no problema 2.6 do Capítulo 2, mas merece ser discutido novamente neste ponto.

Aplicando a definição, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Nessa altura, após uma vasta exposição sobre os limites, é importante que o leitor esteja bem confortável com as manipulações aqui feitas, situação que provavelmente não ocorreu quando fizemos pela primeira vez este cálculo no Capítulo 2.

De forma mais direta, é importante que se esteja familiarizado com o fato de h ter a possibilidade de ser simplificado na terceira linha — uma vez que ele não é nulo, isso pode ser feito. O que fizemos ali foi uma manipulação visando eliminar uma indeterminação no cálculo do limite, o que ocorreu, visto que na quarta linha já conseguimos ver com facilidade qual é o comportamento da expressão quando $h \rightarrow 0$.

Note que a derivada se anula justamente em $x = 0$, onde sabemos ser o vértice da parábola descrita por $f(x) = x^2$. Isto é, a solução da equação $f'(x) = 2x = 0$ é apenas uma, $x = 0$, que nos diz o ponto em que a reta tangente tem coeficiente angular nulo, ou seja, é horizontal.

Exemplo 4.2

Calcule, pela definição, a derivada da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ora, sendo a derivada um limite, e como o limite da soma é a soma dos limites, parece que um bom caminho seria quebrar a função quadrática em três termos, a saber, ax^2 , bx e c , calculando a derivada (o limite) para cada um deles e depois somá-los.

1. Termo quadrático: ax^2

Vamos aplicar o limite da Definição 4.1 à função $g(x) = ax^2$. Logo, teremos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x^2 + 2xh + h^2 - x^2)}{h} \\ &= a \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2ax. \end{aligned}$$

Note que, em comparação com o exemplo anterior, no qual vimos que derivada de $f(x) = x^2$ era dada por $f'(x) = 2x$, neste caso, quando a função original vem multiplicada por uma constante, isto é, se $f(x) = ax^2$, o efeito foi que a função derivada acabou carregando tal constante multiplicativa, se tornando $f'(x) = 2ax$.

2. Termo linear: bx

Ora, o coeficiente angular da reta descrita por $y(x) = bx$ é, naturalmente, dado por b . Logo, a derivada de tal função seria $y'(x) = b$, o que pode ser

facilmente mostrado pela definição formal de derivada:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{bx + bh - bx}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} b \\ &= b. \end{aligned}$$

3. Termo constante: c

Ora, a função constante $p(x) = c$ representa uma reta horizontal no plano, de modo que seu coeficiente angular é nulo. Logo, devemos esperar que a derivada de uma constante seja zero, o que pode facilmente ser mostrado por meio da definição de derivada:

$$\begin{aligned} p'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

uma vez que $p(x) = p(x+h) = c$ para quaisquer x e h , dado que a função é constante.

Dito isso, temos agora a derivada da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ somando cada uma dessas parcelas:

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Note que, dado um certo ponto x , tal equação sempre nos fornecerá o coeficiente angular da reta que tangencia a função naquele ponto. Testemos alguns casos:

- Para $x = 0$

Nesse caso, tem-se $f'(0) = 2a \cdot 0 + b = b$, ou seja, o coeficiente angular da reta que tangencia a parábola neste ponto é igual a b .

- Para $x = -\frac{b}{2a}$:

Nesse caso, teremos

$$f'\left(-\frac{b}{2a}\right) = 2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b = 0,$$

ou seja, a inclinação da reta tangente à parábola é nula, portanto, temos uma tangente horizontal em $x = -b/2a$, o que indica que tal ponto representa o vértice da parábola.

Note, portanto, que a partir da função $f(x)$ obtemos uma outra função $f'(x)$ — a função derivada de f , que fornece, para cada x , o coeficiente angular da reta que tangencia f naquele ponto.

Exemplo 4.3

Calcule, pela definição, a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$.

A derivada é dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Novamente, vale insistir na interpretação do resultado: a função $f'(x)$ fornece, para cada valor de x , o coeficiente angular da reta que tangencia a primeira função — $f(x)$ — naquele respectivo ponto.

Exemplo 4.4

Calcule, pela definição, a derivada da função $f(x) = \sin(x)$.

A derivada, por definição, é dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cos(h) + \sin(h) \cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos(x) \frac{\sin(h)}{h} - \sin(x) \frac{(1 - \cos(h))}{h} \right] \\ &= \cos(x) \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \right] - \sin(x) \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(h))}{h} \right] \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

Note que, no último passo, usamos dois resultados de limites conhecidos, do Exemplo 3.2 e do Problema 3.16. É importante notar, também, da segunda para

a terceira linha, o fato de que pudemos tirar o termo $\cos(x)$ do limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \right] = \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}.$$

O que fizemos foi usar a primeira propriedade que listamos sobre limites: o limite do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pelo limite da função. O importante é notar que, como a variável de cálculo do limite é h , qualquer termo que não tenha dependência de h se comporta como uma constante.

Perceba que o exemplo anterior foi justamente a formalização do que fizemos no Exemplo 2.2 do Capítulo 2.

4.1.1 Notação de Leibniz

Uma notação diferente e extremamente rica para o Cálculo Diferencial é aquela usada pelo alemão Gottfried Leibniz. Newton representava a derivada da função $y(x)$ com um ponto em cima, usando $\dot{y}$. Até hoje usa-se muito essa notação em Física para representar derivadas temporais. A notação que usamos até agora é criação do francês Joseph Lagrange, que denotava a derivada da função $y(x)$ colocando um apóstrofo, $y'(x)$, como foi apresentado anteriormente. Já Leibniz representava a derivada de y por uma notação que nos remete a uma fração:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Tal representação será bastante útil em alguns contextos e ela traz consigo, na própria notação, uma certa intuição do que significa a derivada.

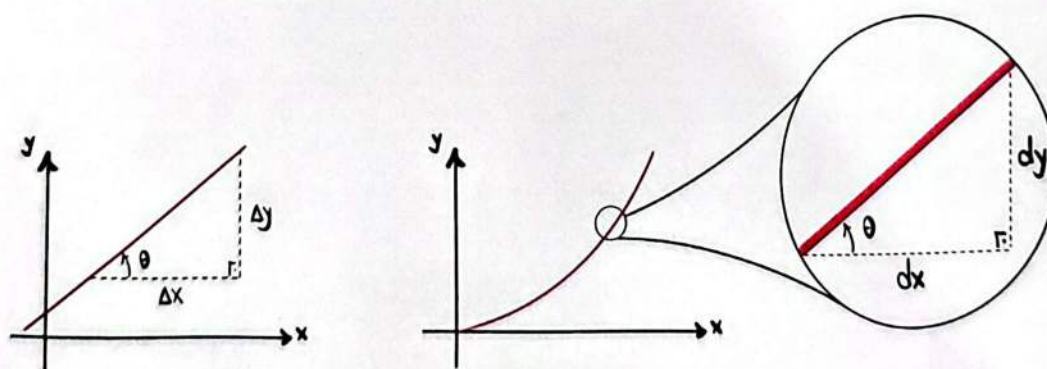


Figura 4.2: Os infinitesimais dx e dy .

Podemos recapitular a definição do cálculo de coeficiente angular para uma reta, dado pela Equação (4.1). A ideia aqui é que, se pegarmos uma curva qualquer no plano e olharmos de modo suficientemente perto, ela é, localmente, uma reta, como

mostra a segunda imagem da Figura 4.2. Nesse caso, os valores de Δy e Δx se tornam os diferenciais dy e dx : variações infinitesimais em y e em x , respectivamente. Desse modo, a forma de calcular o coeficiente angular, isto é, a $\tan(\theta)$, é exatamente aquela que conhecemos para retas, exceto pelo fato de que agora precisamos ter uma variação infinitesimal em x para que consigamos estar num pedaço suficientemente pequeno da curva de tal modo que seu aspecto seja o de uma reta:

$$\tan(\theta) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Essa notação, como dito, é bastante intuitiva e nos ajuda no entendimento e no desenvolvimento de certos cálculos. É importante notar que, apesar de tudo parecer se comportar como se dy/dx fosse a versão infinitesimal da fração $\Delta y/\Delta x$ — e tal interpretação ajuda bastante na intuição —, isso não se trata exatamente de uma fração. Vamos discutir um pouco melhor isso no final do capítulo. Apenas a título de afinar o entendimento do leitor, o que temos de fato é um operador diferencial

$$\frac{d}{dx}$$

que, aplicado em uma função $y(x)$, fornece a derivada de tal função, isto é

$$\frac{d}{dx}(y(x)) = \frac{dy}{dx}. \quad (4.2)$$

Note que, ao plugarmos o operador que calcula derivadas na função, como mostra a segunda parte da igualdade da equação acima, carregamos de modo bastante intuitivo, como mostra a Figura 4.2, o conceito do que está sendo calculado, ainda que tal termo não represente, *ipsis litteris*, uma fração.

4.1.2 Propriedades da derivada

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais e deriváveis num certo intervalo, as seguintes propriedades são válidas:

1. Derivada da soma/diferença

$$\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}.$$

2. Função multiplicada por constante

$$\frac{d}{dx}(\alpha f) = \alpha \frac{df}{dx}, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Regra do Produto

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g) = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx}.$$

4. Regra do Quociente

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{df}{dx} \cdot g - f \cdot \frac{dg}{dx}}{g^2}.$$

Sendo a derivada um limite, como mostra a Definição 4.1, todas essas propriedades decorrem imediatamente das propriedades dos limites. As duas primeiras são consequências diretas do fato de que o limite da soma é igual à soma dos limites e de que o limite do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pelo limite da função. O leitor pode facilmente usar essas propriedades para atestar a validade das duas primeiras sobre derivadas.

A terceira talvez pareça ser um pouco contraintuitiva e, por isso, merece o detalhamento da demonstração. Em um primeiro momento o leitor poderia pensar que a derivada do produto seria o produto das derivadas, uma vez que este é o comportamento dos limites. Isso, contudo, acaba não sendo verdade, como mostraremos na sequência.

Considere as funções $f(x)$ e $g(x)$ cujas derivadas existem em certo ponto de abscissa x , isto é, existem os limites:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{dg}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \quad (4.3)$$

Ora, a derivada da função $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ será, pela definição, dada pelo limite:

$$p'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h},$$

que, desenvolvendo, nos leva a

$$\begin{aligned} p'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) + \\ &\quad + \left(\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \\ &= f(x) \frac{dg}{dx} + g(x) \frac{df}{dx}. \end{aligned}$$

Note que, da terceira para a quarta linha, realmente usamos o fato de que o limite do produto de duas funções é igual ao produto dos limites. Perceba que, apesar de ser este o fato, isso, carregado no desenvolvimento da derivada do produto de duas funções, nos leva à conclusão de que a derivada do produto não é o produto das derivadas, mas sim a soma da derivada da primeira função multiplicada pela segunda com a derivada da segunda função multiplicada pela primeira, como atesta a regra do produto.

O passo da primeira linha do desenvolvimento consistiu apenas em somar e subtrair o termo $f(x+h)g(x)$ no numerador a fim de conseguirmos manipular a expressão para agruparmos termos. De outro modo, isso poderia ter sido feito ao somar e subtrair o termo $f(x)g(x+h)$, como pode ser verificado.

Por fim, a regra do quociente pode ser obtida facilmente por meio da aplicação da regra do produto, interpretando a razão de f e g como sendo o produto de f pela recíproca de g , isto é

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g},$$

e usando a regra do produto já demonstrada, como o leitor pode facilmente atestar.

Exemplo 4.5

Calcule a derivada de $p(x) = x^2 \sin(x)$.

Ora, como já calculado no Exemplo 4.2, a derivada de $g(x) = x^2$ é dada por $g'(x) = 2x$. Já no Exemplo 4.4, mostramos que a derivada da função $f(x) = \sin(x)$ é $f'(x) = \cos(x)$. Logo, aplicando a regra do produto, sendo $p(x) = f(x)g(x)$, tem-se:

$$\begin{aligned} p'(x) &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \\ &= \cos(x)x^2 + 2x \sin(x) \\ &= x(x \cos(x) + 2 \sin(x)). \end{aligned}$$

4.2 Derivadas elementares

4.2.1 Polinômios e Funções Irracionais

Ao longo de exemplos nesse capítulo e no Capítulo 2, já pudemos construir os seguintes resultados:

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x, \quad \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}x^4 = 4x^3.$$

Sugiro ao leitor revisar os Exemplos 4.2 e 2.1, além dos problemas 2.7 e 2.8 que abrem esses cálculos em detalhes. De modo geral, o padrão que observamos é que, ao derivar o monômio $f(x) = x^n$, a sua derivada sempre possui um grau a menos do que a função original, além de aparecer multiplicada pelo grau da função original. Essa é a regra geral para a derivada de um termo do tipo x^n : o expoente *cai* multiplicando a variável e, em seguida, subtrai-se em uma unidade o expoente da variável. O problema 2.9 do Capítulo 2 prova tal resultado, que se resume por

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.} \quad (4.4)$$

Exemplo 4.6

Calcule o coeficiente angular da reta que tangencia a função

$$f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 7x - 1$$

em $x = 1$.

Como a derivada da soma é a soma das derivadas, podemos computar individualmente a derivada de cada termo, isto é:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}(3x^5) + \frac{d}{dx}(2x^4) + \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(5x^2) + \frac{d}{dx}(7x) - \frac{d}{dx}(1) \\ &= 3\frac{d}{dx}(x^5) + 2\frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(x^3) - 5\frac{d}{dx}(x^2) + 7\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(1) \\ &= 3(5x^4) + 2(4x^3) + (3x^2) - 5(2x) + 7 \\ &= 15x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 10x + 7,\end{aligned}$$

onde, na segunda linha, usamos a propriedade de que a derivada de uma constante multiplicada por uma função é igual à constante multiplicada pela derivada da função, ou seja, a *constante sai para fora da derivada*. Avaliando a expressão em $x = 1$, vemos que $f'(1) = 23$.

Na verdade, a regra de derivação da Equação (4.4) se aplica ainda que o expoente n não seja natural. Note que no Exemplo 4.3 a derivada se comportou exatamente como dita a regra:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

A demonstração que fizemos, contudo, partia da premissa de que o expoente n era natural. Após o estudo de derivação implícita, ficará claro por que a regra se estende para $n \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.7

Calcule a derivada da função $f(x) = x^{\sqrt{2}}$.

Aplicando a regra da Equação (4.4), tem-se:

$$\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}.$$

4.2.2 Funções Trigonométricas

Já mostramos, no Exemplo 4.4, que a derivada da função $f(x) = \sin(x)$ é $f'(x) = \cos(x)$. De modo bem semelhante, o problema 4.1 mostra que a derivada da função $g(x) = \cos(x)$ é $g'(x) = -\sin(x)$. Como todas as demais funções trigonométricas são construídas a partir do seno e do cosseno, é possível facilmente computar suas derivadas usando as regras de derivadas construídas na seção anterior. Boa parte desses cálculos são realizados nos problemas propostos dessa seção. Enunciaremos os principais resultados ao leitor:

Função	Derivada
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$
$\csc(x)$	$-\csc(x)\cot(x)$

Tabela 4.1: Derivadas das funções trigonométricas.

Exemplo 4.8

Encontre a derivada da função $f(x) = \sin(2x)$.

Pela fórmula do arco-duplo, sabemos que $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Logo, usando a regra do produto e as derivadas básicas, concluímos que

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dx} &= 2\left(\sin(x)\frac{d}{dx}(\cos(x)) + \cos(x)\frac{d}{dx}(\sin(x))\right) \\
 &= 2(-\sin^2(x) + \cos^2(x)) \\
 &= 2\cos(2x).
 \end{aligned}$$

Note que, apesar da derivada de $\sin(x)$ ser $\cos(x)$, a derivada de $\sin(2x)$ não é apenas $\cos(2x)$. Aparece, além disso, um fator 2 no termo da função derivada. Isso acontece porque $\sin(2x)$ é uma função composta: considere que $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = 2x$. Logo, nossa função em questão é $f(g(x))$. Em seções futuras, estudaremos em detalhes as derivadas de funções compostas e construiremos outra forma de computar derivadas como essa. De imediato, é bom que fique claro ao leitor que a Tabela 4.1 mostra a derivada de funções básicas. As derivadas de funções como $\tan(2x)$, $\sin(3x)$ — por se tratarem de funções compostas — não são obtidas de forma imediata apenas trocando x por $2x$ ou $3x$ nas funções da tabela.

4.2.3 Funções Exponenciais

Vamos avaliar, usando a definição, quanto vale a derivada da função exponencial $f(x) = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^x f'(0). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ou seja, vemos que a função exponencial tem uma derivada que é proporcional à própria função, sendo a constante de proporcionalidade o valor de tal derivada em $x = 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \implies f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

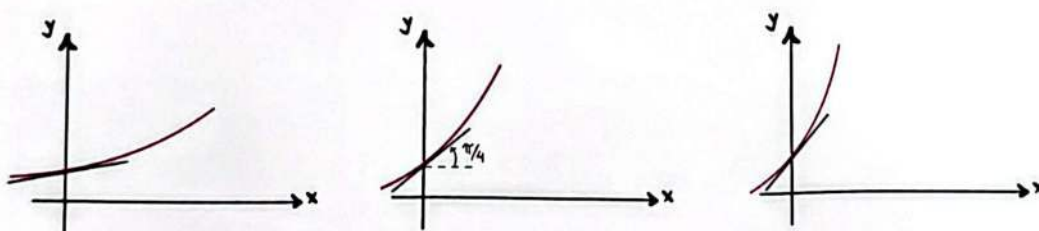


Figura 4.3: O limite em que a reta secante se torna tangente.

A Figura 4.3 mostra três curvas exponenciais diferentes e a sua reta tangente em $x = 0$. Vemos que existe uma exponencial particular para a qual a reta que a tangencia em $x = 0$ está inclinada de $\pi/4$ e, portanto, a constante de proporcionalidade no cálculo da derivada na Equação (4.5) se torna a unidade:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \tan(\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

A base a para a qual a igualdade acima vale é definida como sendo o número de Euler e , e, para tal função, como mostra a Equação (4.5), sua derivada é igual à própria função:

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x.} \tag{4.6}$$

Definição 4.2: Número de Euler

O número de Euler e é aquele que satisfaz o seguinte limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

A função $f(x) = e^x$ é, portanto, bastante especial, uma vez que é a única função cuja derivada é igual à própria função. O Apêndice A explora melhor algumas características do número e , além de mostrar a equivalência entre a definição de e dada acima e aquela que usamos no Exemplo 3.3.

Por fim, para a derivada da exponencial de uma base qualquer a , a Equação (4.5) nos permite generalizar o resultado, obtendo

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln(a). \quad (4.7)$$

Isso ocorre porque uma das formas de se definir o logaritmo natural é justamente por meio do limite abaixo.

Definição 4.3: Logaritmo Natural

O logaritmo natural $\ln$ de um certo número a pode ser definido por

$$\ln(a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

Note que isso é coerente com a Definição 4.2, uma vez que $\ln(e) = 1$. Um resumo das derivadas estudadas nessa subseção se encontra na tabela abaixo.

Função	Derivada
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln(a)$

Tabela 4.2: Derivadas das funções exponenciais.

4.2.4 Funções Logarítmicas

A derivada do logaritmo $f(x) = \ln(x)$ é dada, pela definição, por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde, no último passo, fizemos a mudança de variável $h = ux$. O objetivo de tal mudança foi cair em um limite clássico já estudado por nós no problema 3.17, cujo resultado é

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1,$$

de tal modo que somos levados a

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}} \quad (4.9)$$

Fazendo o mesmo desenvolvimento para a função $f(x) = \log_a(x)$, o leitor chegará, de modo análogo, que

$$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+u)}{u},$$

e, fazendo a mudança de base, pode-se escrever que

$$\log_a(1+u) = \frac{\ln(1+u)}{\ln(a)},$$

de modo que a derivada resulta em

$$\boxed{\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}} \quad (4.10)$$

Isso condiz com o resultado para a derivada do logaritmo natural, uma vez que, se a base é $a = e$, então a derivada se torna $\frac{1}{x \ln(e)} = \frac{1}{x}$. Em resumo, as derivadas de logaritmos são:

Função	Derivada
$\ln(x)$	$1/x$
$\log_a(x)$	$1/(x \ln(a))$

Tabela 4.3: Derivadas das funções logarítmicas.

4.3 Regra da Cadeia e Derivação Implícita

A regra da cadeia é utilizada para calcular a derivada de funções compostas, sabendo de antemão a derivada de cada uma das funções da composição. É o que nos permite, por exemplo, calcular a derivada da função $f(x) = \sin(x^2)$. Note que é de conhecimento do leitor a derivada de $g(x) = \sin(x)$, além da derivada da função $h(x) = x^2$. Queremos, contudo, computar a derivada da composição $f(x) = g(h(x))$ sem precisar usar a definição por limite, usando apenas o conhecimento das derivadas básicas de g e h .

A regra da cadeia diz que, neste caso, a derivada de $f(x)$ em relação a x , isto é, df/dx , é dada pelo produto da derivada de f em relação a g , df/dg , pela derivada de g em relação a x , isto é, dg/dx . Na notação de Leibniz, tal resultado fica muito claro, assumindo o aspecto de uma identidade algébrica:

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}} \quad (4.11)$$

Esse é mais um exemplo de como o uso da notação de Leibniz deixa o resultado muito mais intuitivo e evidente.

Demonstração

Seja a função $y(x) = f(g(x))$. Queremos computar quanto vale df/dx , isto é:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}. \end{aligned}$$

Observe que, no primeiro limite da penúltima linha, $h \rightarrow 0 \implies g(x+h) \rightarrow g(x)$, ou seja, que $\Delta g \rightarrow 0$. Logo, tal limite é simplesmente:

$$\lim_{\Delta g \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} = \frac{df}{dg}.$$

onde mais uma vez a notação de Leibniz ajuda a tornar as coisas mais evidentes.

Exemplo 4.9

Calcule a derivada das funções $q(x) = \sin(x^2)$ e $p(x) = \sin^2(x)$.

Para a primeira função, temos $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = x^2$ e queremos calcular a derivada de $f(g(x))$. A regra nos diz que primeiro devemos derivar f em relação a g , isto é, derivar o seno em relação ao argumento de dentro da função. Como a derivada de $\sin(x)$ com respeito a x é $\cos(x)$, a derivada de $\sin(x^2)$ com respeito a x^2 será $\cos(x^2)$. Ou seja:

$$\frac{df}{dg} = \frac{d}{d(x^2)} \sin(x^2) = \cos(x^2). \quad (4.12)$$

Agora temos que multiplicar isso pela derivada de g em relação a x , o que é

imediato:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx} x^2 = 2x. \quad (4.13)$$

Logo, a derivada que procuramos é

$$\frac{d}{dx} \sin(x^2) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} = 2x \cos(x^2).$$

Para deixar mais claro ao leitor, quando derivamos f em relação a g na Equação (4.12), o que estamos dizendo é que a derivada do seno em relação ao seu argumento interno será sempre o cosseno deste mesmo argumento, ou seja

$$\frac{d}{d(\square)} \sin(\square) = \cos(\square),$$

qualquer que seja o valor de $\square$. Isso se reduz à derivada básica que conhecemos quando $\square = x$, ou seja,

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x).$$

Para a segunda função, $p(x)$, tem-se $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sin(x)$, e queremos computar a derivada da função $f(g(x)) = (\sin(x))^2$.

Ora, derivando f com relação a g , temos:

$$\frac{df}{dg} = \frac{d}{d(\sin(x))} (\sin(x))^2 = 2 \sin(x). \quad (4.14)$$

Derivando agora g em relação a x , temos uma derivada básica:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x). \quad (4.15)$$

Logo, a derivada que buscamos é

$$\frac{d}{dx} \sin^2(x) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} = 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x).$$

Novamente, quando derivamos uma função externa em relação à função interna, como na Equação (4.14), o que estamos dizendo é que a derivada do quadrado de qualquer coisa é simplesmente duas vezes aquela coisa, isto é

$$\frac{d}{d(\square)} \square^2 = 2\square.$$

Isso vale para $\square$ sendo $\sin(x)$ e vale, em particular, quando ele assume o valor de x , isto é:

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x,$$

e para qualquer outro valor que $\square$ possa assumir.

Exemplo 4.10

Calcule a derivada da função $f(x) = e^{\sin(x)}$.

Derivando a função externa, isto é, e^x , em relação à função interna, ou seja, $\sin(x)$, tem-se:

$$\frac{d}{d(\sin(x))} e^{\sin(x)} = e^{\sin(x)}.$$

Derivando agora a função interna, ou seja, $\sin(x)$, em relação à variável x , temos o resultado elementar:

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x).$$

Logo, multiplicando os dois resultados, tem-se:

$$\frac{d}{dx} e^{\sin(x)} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} = e^{\sin(x)} \cos(x).$$

Neste caso, as funções da composição seriam $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sin(x)$, e a derivada acima é $\frac{d}{dx} f(g(x))$.

Um recurso bem eficiente para o cálculo de derivadas de certas funções, que na maior parte das vezes usa a regra da cadeia, é o da derivação implícita. Isso é bastante útil quando não conseguimos escrever uma expressão literal $y(x)$ que descreva y explicitamente como uma função de x . Nesse caso, a estratégia mais comum consiste em derivar os dois lados da expressão, aplicar a regra da cadeia e isolar dy/dx . O exemplo abaixo deixará isso mais claro.

Exemplo 4.11

Calcule o coeficiente angular da reta crescente que tangencia a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1 em $x = 0,5$.

A circunferência é descrita pela equação $x^2 + y^2 = 1$. Essa equação não expressa y como função de x de forma explícita. Tal equação mostra que x e y estão relacionados, mas fica implícita a natureza exata dessa relação. Claro que poderíamos manipulá-la a fim de escrever y como função de x explicitamente e, então, derivar em relação a x a expressão $y(x)$. Isso, contudo, não é necessário e, diferente deste caso, nem sempre poderá ser feito. Nossa estratégia será, nessas situações, derivar os dois lados da equação implícita. Se buscamos dy/dx , apliquemos a derivada em relação a x em ambos os lados:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Note que usamos a regra da cadeia para derivar y^2 , uma vez que tal expressão está sendo derivada em relação a x . Ou seja, $\frac{d}{dy}(y^2) = 2y$, mas $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y \frac{dy}{dx}$, como indica a Regra da Cadeia. Logo, isolando $\frac{dy}{dx}$ na equação acima, temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Naturalmente, tal como na expressão original, nossa derivada não aparece como função explícita de x , o que poderia ser feito, bastando isolar $y(x)$ na expressão original e trazer isso para a expressão da derivada.

Para $x = 1/2$, tem-se $y = \pm\sqrt{3}/2$. Como queremos a reta crescente que tangencia a circunferência, isso ocorrerá para $y < 0$, ou seja, $y = -\sqrt{3}/2$. Assim, o coeficiente angular é

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{1/2}{-\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Exemplo 4.12

Calcule a derivada $\frac{dy}{dx}$, em que a dependência de y com x é dada pela relação :

$$\sin(xy) = x^2 + 2y.$$

Esse é um ótimo exemplo de situação em que seria bem difícil isolar y como função de x na expressão que os relaciona. Façamos, portanto, a derivação implícita:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin(xy) &= \frac{d}{dx} (x^2 + 2y) \\ \cos(xy) \left(\frac{dx}{dx} y + x \frac{dy}{dx} \right) &= 2x + 2 \frac{dy}{dx}, \end{aligned}$$

de onde extraímos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y \cos(xy)}{2 - x \cos(xy)}.$$

Exemplo 4.13

Calcule a derivada da função $f(x) = a^x$.

Já sabemos que tal derivada é dada por $f'(x) = a^x \ln(a)$. Vamos mostrar isso

usando derivação implícita. Sendo $y = a^x$, tem-se $\ln(y) = x \ln(a)$. Derivando os dois lados, concluímos que

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x \frac{d}{dx}(\ln(a)) + \ln(a) \frac{d}{dx}(x) = \ln(a),$$

ou seja, sendo $y = a^x$, concluímos que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln(a).$$

Podemos também construir uma regra muito útil, usando a Regra da Cadeia, para derivada de funções inversas em termos da função original. Sendo $y = f(x)$ nossa função original, invertível, cuja inversa é $x = f^{-1}(y)$, então:

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}}. \quad (4.16)$$

Tal expressão diz que a taxa de variação, em relação a y , da função inversa $x(y)$ é o inverso da taxa de variação, em relação a x , da função original $y(x)$, avaliadas em um mesmo ponto. Novamente, a notação de Leibniz faz a expressão parecer apenas uma identidade algébrica.

Demonstração

Se $y(x)$ possui inversa dada por $x(y)$, então a identidade abaixo sempre vale:

$$y(x(y)) = y.$$

Derivando implicitamente os dois lados da equação acima em relação a y , chegamos em:

$$\frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx} = 1,$$

de onde segue naturalmente o resultado da Equação (4.16). ■

Exemplo 4.14

Calcule a derivada de $f(x) = \ln(x)$.

Seja $y(x) = \ln(x)$, cuja inversa é $x(y) = e^y$. Logo, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(e^y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x},$$

que é exatamente o resultado que esperávamos.

Exemplo 4.15

Calcule a derivada da função $f(x) = \arcsin(x)$.

Se $f(x) = \arcsin(x)$, segue imediatamente que $x(y) = \sin(y)$, que é sua inversa. Podemos usar o conceito de derivada da inversa exposto anteriormente, fazendo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\sin(y))} = \frac{1}{\cos(y)}.$$

Entretanto, queremos exprimir tal derivada como função de x , isto é:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Logo, de $x = \sin(y)$ e aplicando a Relação Fundamental da Trigonometria, tem-se $\cos(y) = \sqrt{1 - x^2}$. Desse modo, teremos:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.} \quad (4.17)$$

Uma outra forma de encontrar esse mesmo resultado, sem usar diretamente a derivada da função inversa, é usando derivação implícita de modo direto. Como $y(x) = \arcsin(x)$, por definição, isso significa que $\sin(y) = x$. Derivando essa expressão em relação à variável x , temos:

$$\cos(y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1,$$

ou seja, encontramos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(y)},$$

e, através da Relação Fundamental da Trigonometria, somos levados ao mesmo resultado.

Função	Derivada	Função	Derivada
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arcsec}(x)$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\text{arccsc}(x)$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Tabela 4.4: Derivadas das funções trigonométricas inversas.

Usando derivação implícita, como mostra o exemplo anterior, é possível construirmos as derivadas de todas as funções trigonométricas inversas. Algumas são resolvidas nos problemas dessa seção. A Tabela 4.4 apresenta um resumo geral de tais resultados.

4.4 Derivabilidade e Continuidade

Agora que fizemos uma ampla apresentação da teoria sobre derivadas, vale ressaltar algumas relações entre derivabilidade e continuidade. Recapitulando, dizemos que $f(x)$ é contínua em $x = a$ se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad (4.18)$$

ou seja, o limite em $x = a$ precisa existir — os limites laterais devem existir, coincidir e resultar em um valor finito — e tal limite precisa coincidir com o valor da função em $x = a$. Este é o conceito de continuidade. Já o de derivabilidade implica apenas a existência de um limite, de modo que dizemos que $f(x)$ é derivável em $x = a$ se o seguinte limite existe e é finito:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (4.19)$$

Queremos aqui convencer o leitor — apenas por meio de intuição e geometria — que derivabilidade implica em continuidade, mas o inverso não é verdade. Ou seja:

$$f \text{ é derivável em } x = a \implies f \text{ é contínua em } x = a.$$

Contudo, o fato de ser contínua não implica que ela é derivável. Um exemplo clássico é a função $f(x) = |x|$, que é claramente contínua em todo domínio — não possui algum buraco, salto ou quebra — mas não é derivável na origem, como mostra a Figura 4.4. Note que, se aproximando pela esquerda, tudo indica que a derivada em $x = 0$ é negativa; mas se aproximando pela direita, a derivada parece ser positiva.

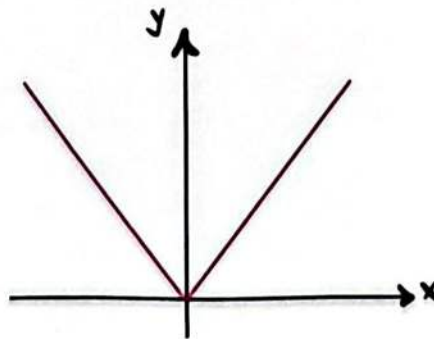


Figura 4.4: A função $f(x) = |x|$ possui uma quina, ponto no qual a derivada não existe.

Ou seja, ao calcular o limite da Equação (4.19), veríamos que os limites laterais não coincidem, de modo que o limite não existe — a derivada não existe naquele ponto. De fato, não existe reta tangente à função em $x = 0$, como o próprio gráfico deixa evidente.

De modo geral, uma função irá falhar em ser derivável em algum ponto que houver uma descontinuidade, uma quina, como no exemplo da função módulo, ou um pico em que $f(x) \rightarrow \infty$, uma vez que, nesse caso, a reta tangente tende para uma reta vertical, cujo coeficiente angular vai para ∞ . Com tudo que estudamos até aqui, essas três situações devem ser claras ao leitor.

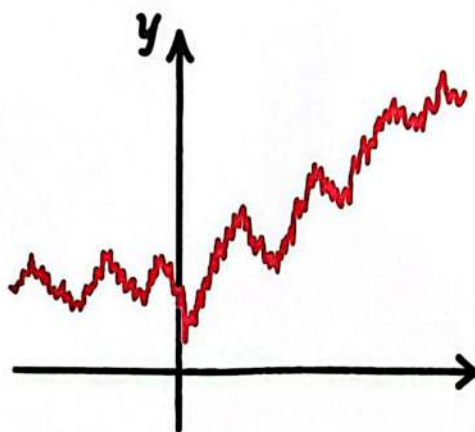


Figura 4.5: A função de Weierstrass.

Um outro caso um pouco mais avançado que pode implicar em não derivabilidade é quando a função possui oscilações extremas de modo que não é possível definir uma reta tangente em ponto algum. Um exemplo é a função de Weierstrass, dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \text{ com } 0 < a < 1, b \in \mathbb{N} \text{ e } ab > 1 + 3\pi/2.$$

Como cosseno é uma função contínua, a função de Weierstrass, sendo uma soma de funções contínuas, também é contínua em todo o seu domínio. Porém, pela sua natureza, ela possui uma infinidade de oscilações muito finas e densas, o que faz com que nenhum ponto do gráfico tenha reta tangente definida e a função, portanto, não é derivável em ponto algum de seu domínio, como mostra a Figura 4.5.

Tal função, como mostra a figura, não tem nenhuma suavidade, mesmo sendo contínua: ela se comporta como se fosse um fractal contínuo. Este objeto matemático foi construído no século XIX pelo matemático Karl Weierstrass e teve a importância histórica de justamente cravar que ser contínuo não implica ser derivável. Agora que está claro que continuidade não implica derivabilidade, vamos provar que derivabilidade implica em continuidade.

Demonstração

Se $f(x)$ é derivável em $x = a$, isso significa que existe — e é finito — o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Queremos mostrar que a existência de $f'(a)$ implica

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

ou seja, implica a continuidade de f em $x = a$. Vamos começar escrevendo que

$$f(x) = f(a) + \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right).$$

Tomando o limite quando $x \rightarrow a$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0 \\ &= f(a). \end{aligned}$$



Note que, na última linha, só foi possível dizer que $f'(a) \cdot 0$ se anula porque partimos da premissa de que a função é derivável em $x = a$, ou seja, o limite existe e é finito, de modo que seu produto por zero é certamente nulo. Alguns exemplos de funções que são deriváveis em todo o seu domínio — e, por conseguinte, são contínuas em todo o domínio — são as funções polinomiais, seno, cosseno, funções exponenciais e logarítmicas.

4.5 Diferencial

4.5.1 Derivada como taxa de variação

No estudo de retas da Geometria Analítica, o coeficiente angular de uma reta $f(x)$, dado por

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

representa a **taxa de variação** da função, ou seja, o quanto y varia quando x varia. Isso é utilizado para, dado um certo ponto da função, descobrirmos para onde ela vai, isto é, Δy , quando fizermos um certo avanço em x , sendo, para isso, necessário saber apenas de quanto avançamos, isto é, Δx , e o coeficiente angular m da função:

$$\Delta y = m \Delta x.$$

Para a função que passa pelos pontos $(1, 3)$ e $(2, 7)$, o seu coeficiente angular é

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7 - 3}{2 - 1} = 4,$$

o que significa que a taxa de variação Δy da função é quatro vezes a taxa de variação da variável Δx .

Logo, estando no ponto $x = 1$, ao avançar para $x = 2$, ou seja, fazer uma variação de $\Delta x = 1$, a função irá variar o quádruplo disso, ou seja, $\Delta y = 4\Delta x = 4$. Logo, se em $x = 1$ tínhamos $f(1) = 3$, o novo valor da função será

$$y(a + \Delta x) = y(a) + m\Delta x \quad (4.20)$$

$$y(a + \Delta x) = y(1) + 4\Delta x$$

$$y(1 + 1) = 3 + 4 \cdot 1 = 7,$$

como já era esperado.

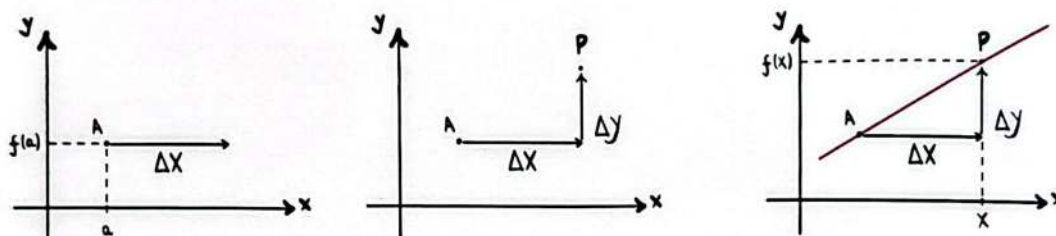


Figura 4.6: A taxa de variação permite entender o que ocorre com $f(x)$ dada uma certa variação Δx .

A Figura 4.6 evidencia isto: conhecendo um ponto A qualquer da função, se soubermos a razão $\Delta y/\Delta x$, podemos construir qualquer outro ponto P da função dado um deslocamento qualquer horizontal, porque sabemos a razão entre os deslocamentos vertical e horizontal: a razão entre as taxas de variação vertical e horizontal. É por isso que qualquer reta fica integralmente determinada dados um ponto e seu coeficiente angular.

Note que a mesma estratégia pode ser usada para uma função qualquer, como mostra a Figura 4.7. Isso porque, localmente, a curva tem comportamento retilíneo,

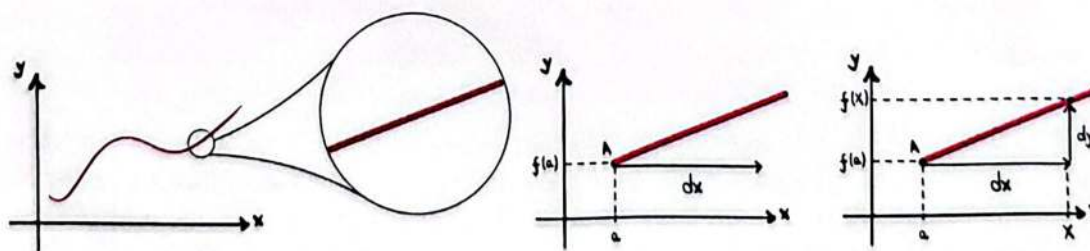


Figura 4.7: A taxa de variação infinitesimal.

de modo que se soubermos a **taxa infinitesimal de variação** dy/dx , podemos, dado um ponto qualquer, descobrir para aonde vai a função após um incremento dx na variável. Isso nos permite escrever a versão infinitesimal da Equação (4.20), ou seja:

$$f(a + dx) = f(a) + dy$$

e, sendo $dy/dx = f'(x)$, tem-se

$$f(a + dx) = f(a) + f'(a)dx. \quad (4.21)$$

Note que, neste caso, o coeficiente angular não é único, diferente do caso linear, onde o valor de m é fixo. Aqui, o coeficiente angular, $f'(a)$, varia ponto a ponto. Se dx for realmente infinitesimal, a Equação (4.21) é uma igualdade. Contudo, podemos usá-la para fazer uma boa aproximação linear, ou seja, aproximar uma curva por uma reta, desde que dx seja suficientemente pequeno. Neste caso, como ele não será mais infinitesimal, é conveniente retomarmos a notação Δx , de modo que a Equação (4.21) se tornará

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x. \quad (4.22)$$

Tal aproximação será tão melhor quanto menor for Δx , tendendo ao valor exato de $f(a + \Delta x)$ quando Δx se tornar infinitesimal, isto é, $\Delta x \rightarrow dx$.

Exemplo 4.16

Um capital é colocado em um investimento que rende 0,5% ao mês. Calcule o retorno percentual após 8 meses de investimento.

Considere a função $f(x) = x^8$. Nesse caso, queremos saber quanto vale

$$1,005^8 = f(1 + 0,005).$$

Tem-se $f'(x) = 8x^7$. Sendo $x = 1$, segue que $f'(1) = 8$ e, com $\Delta x = 0,005$, pela Equação (4.22), ter-se-á

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &\approx f(x) + f'(x)\Delta x \\ f(1 + 0,005) &\approx f(1) + f'(1) \cdot 0,005 \\ f(1 + 0,005) &\approx 1 + 8 \cdot 0,005, \end{aligned}$$

de onde tiramos que $1,005^8 \approx 1,004$, o que dá um rendimento de 4% em 8 meses, sendo que o valor real é 4,007%.

4.5.2 O diferencial como linguagem do Cálculo

A notação dy e dx pode parecer apenas simbólica, mas ela carrega uma carga **semântica e operacional profunda**. Para concluir este tópico, carece recapitular e evidenciar tais aspectos, que constituem a linguagem fundamental do Cálculo.

1. Simbólico — O diferencial como ideia de variação infinitesimal

A notação de Leibniz surgiu antes da formalização dos limites. Era uma forma engenhosa de representar **pequenas variações**, como se fossem “quantidades infinitamente pequenas” que se relacionam por uma razão:

$$\frac{dy}{dx} \approx \text{taxa de variação de } y \text{ com respeito a } x.$$

Mesmo hoje, quando tratamos dy e dx como símbolos definidos via limite, eles retêm essa intuição simbólica.

Exemplo: Na Física, se a posição de um objeto é dada por $s(t)$, então ds/dt representa a velocidade instantânea: uma variação infinitesimal de espaço por unidade de tempo.

2. Operacional — O diferencial como ferramenta de cálculo

Mesmo que dy e dx não sejam números reais de existência independente e que dy/dx não seja exatamente uma fração, podemos operar com eles quase como se fossem, desde que o contexto permita. Isso possibilita:

- Aplicar a **Regra da Cadeia** com clareza simbólica:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

- Fazer substituições em integrais (isso será bastante utilizado em capítulos futuros):

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du.$$

- Resolver equações diferenciais separáveis:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y \Rightarrow \frac{1}{y} dy = x^2 dx.$$

Note que aqui podemos manipular os termos dx e dy como se fossem números, colocando de um lado da equação termos que envolvem y e do outro termos que envolvem x . Este é o passo fundamental para resolver uma equação diferencial deste tipo.

3. Conceitual — O diferencial como conexão entre derivada e variação

O diferencial aproxima a variação real Δy usando a derivada:

$$dy = f'(x) \cdot dx \approx f(x + dx) - f(x).$$

Ou seja, a derivada não é apenas um número abstrato, mas uma forma de prever e modelar como uma quantidade muda. Mesmo sem serem “números reais” independentes, os diferenciais são peças-chave na linguagem infinitesimal do Cálculo — uma ponte entre o rigor do limite e a intuição da variação. Eles funcionam como uma linguagem comum entre a Geometria (tangentes), a Álgebra (operações) e a intuição.

4.6 Problemas

Seção 4.1 – Definição

Problema 4.1 (*Derivada do cosseno*). Calcule, pela definição, a derivada da função $f(x) = \cos(x)$.

Problema 4.2 (*Derivada da tangente por definição*). Calcule, pela definição, a derivada da função $f(x) = \tan(x)$.

Problema 4.3 (*Derivada do inverso de x*). Calcule, pela definição, a derivada da função $f(x) = 1/x$.

Problema 4.4 (*Derivada do arco dobro*). Calcule, pela definição, a derivada da função $f(x) = \sin(2x)$.

Problema 4.5 (*Tangente como quociente*). Calcule, usando as derivadas de $\sin(x)$ e $\cos(x)$, a derivada de $p(x) = \tan(x)$.

Problema 4.6 (*Produto triplo*). Calcule a derivada da função $f(x) = x^3 \sin(x) \sqrt{x}$.

Problema 4.7 (*Regra do quociente*). Demonstre a regra do quociente.

Seção 4.2 – Derivadas elementares

Problema 4.8 (*Derivada da cotangente*). Mostre que a derivada de $f(x) = \cot(x)$ é $f'(x) = -\csc^2(x)$.

Problema 4.9 (*Derivada da secante*). Mostre que a derivada da função $f(x) = \sec(x)$ é $f'(x) = \sec(x) \tan(x)$.

Seção 4.3 – Regra da Cadeia e Derivação Implícita

Problema 4.10 (*Cosseno com raiz*). Calcule a derivada da função $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$.

Problema 4.11 (*Derivada de $f \circ g \circ h$*). Calcule a derivada de $f(x) = \ln(\sin^2(x))$.

Problema 4.12 (*Derivada do arco-cosseno*). Calcule a derivada de $f(x) = \arccos(x)$.

Problema 4.13 (*Derivada do arco-tangente*). Calcule a derivada de $f(x) = \arctan(x)$.

Problema 4.14 (*Derivada do logaritmo*). Calcule, por derivação implícita, a derivada da função $f(x) = \log_a(x)$.

Seção 4.4 – Derivabilidade e Continuidade

Problema 4.15 (*Derivabilidade da função por partes*). Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1, \\ 2x - 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Ela é derivável em $x = 1$?

Problema 4.16 (*Ajuste para ser derivável*). Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & \text{se } x < 2, \\ \ln(x + 2), & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Determine os valores de a e b para que f seja

- (i) Contínua em $x = 2$.
- (ii) Derivável em $x = 2$.

Problema 4.17 (*Aproximação com diferencial*). Calcule o valor de $\sqrt{36,7}$.

Problema 4.18 (*Quando a Álgebra falha*). A relação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

é sempre válida?

4.7 Exercícios

Seção 4.1 – Definição

Exercício 4.19 (*Função raiz por definição*). Calcule o valor do coeficiente angular da reta que tangencia a função $f(x) = \sqrt{x+1}$ em $x = 4$, usando a definição de derivada.

Exercício 4.20 (*Inverso do quadrado por definição*). Calcule, pela definição, a derivada da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Exercício 4.21 (*Derivada polinomial*). Calcule a derivada da função:
 $f(x) = (x-3)^3(x-4)(x^2-3x)$.

Exercício 4.22 (*Derivada racional-trigonométrica*). Calcule a derivada da função:
 $f(x) = \sqrt{x} \sin(x)$.

Seção 4.2 – Derivadas elementares

Exercício 4.23 (*Logaritmos e trigonometria*). Calcule a derivada da função:
 $f(x) = \ln(x) \sin(x)$.

Exercício 4.24 (*Exponenciais*). Calcule a derivada da função $f(x) = 3^x \tan(x)$.

Exercício 4.25 (*Verificando a regra do produto de potências*). Calcule a derivada da função $f(x) = 3^{5x} \cdot 3^{2x}$ por meio da regra do produto e verifique a propriedade de produtos de potência de mesma base.

Seção 4.3 – Regra da Cadeia e Derivação Implícita

Para os Exercícios 4.26–4.31, calcule a derivadas das funções solicitadas.

Exercício 4.26 (*Raiz quadrada da função quadrática*). $f(x) = \sqrt{3x^2 + 7x - 1}$.

Exercício 4.27 (*Logaritmo do seno*). $f(x) = \ln(\sin(x))$.

Exercício 4.28 (*Seno do logaritmo*). $f(x) = \sin(\ln(x))$.

Exercício 4.29 (*Exponencial estranha*). $f(x) = e^{\sqrt{\sin^2(x)}}$.

Exercício 4.30 (*Trigonometria exponencial*). $f(x) = \tan^x(x)$.

Exercício 4.31 (*Logaritmo do arco-seno*). $f(x) = \log_3(\arcsin(x^2))$.

Exercício 4.32 (*Derivando implicitamente 01*). Calcule a derivada dy/dx da função $y(x)$ determinada pela relação $x^3 + y^3 = 10x^2y + 10y^2x$.

Exercício 4.33 (*Derivando implicitamente 02*). Calcule a derivada dy/dx da função $y(x)$ determinada pela relação $x^2 + \ln(xy) = 10xy$.

Exercício 4.34 (*Derivando implicitamente 03*). Calcule a derivada dy/dx da função $y(x)$ determinada pela relação $\sin(xy) = 6x^2 + 12y^2 + y \ln(x)$.

Exercício 4.35 (*Resfriamento do líquido*). A temperatura T de um líquido depende do tempo t por meio da função $T = f(s(t))$, em que $s(t)$ representa a superfície de contato com o ar, dado pela relação $s(t) = 3t^2 + 2t$. Sendo $f(s) = \sqrt{s+4}$, calcule a taxa de variação da temperatura no tempo, isto é, dT/dt .

Exercício 4.36 (*Balão inflando*). Considere um balão esférico cujo raio $r(t)$ cresce exponencialmente com tempo t de acordo com $r(t) = e^{at}$. Encontre a taxa de variação do volume V do balão no tempo, isto é, dV/dt .

Exercício 4.37 (*Órbita elíptica*). A órbita da Terra em torno do Sol é dada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Encontre a direção instantânea da velocidade da Terra em cada ponto, isto é, $\frac{dy}{dx}$.

Exercício 4.38 (*Coordenadas polares*). Uma curva, em coordenadas polares, é dada por $r(\theta) = \cos(\theta)$. Usando as equações de transformação de coordenadas $y = r \cos(\theta)$ e $x = r \sin(\theta)$, encontre dy/dx por meio da Regra da Cadeia.

Seção 4.4 – Derivabilidade e Continuidade

Exercício 4.39 (*Forçando a derivabilidade*). Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x < 2, \\ ax + b, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Determine os valores de a e b para que $f(x)$ seja contínua e derivável em $x = 2$.

Exercício 4.40 (*Ponte suave*). Um engenheiro deseja projetar uma ponte cuja altura, em função da posição horizontal x , obedece à função:

$$h(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b, & \text{se } x \leq 2, \\ \ln(x+1), & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Determine a e b para que a transição em $x = 2$ seja suave, ou seja, $h(x)$ deve ser derivável nesse ponto.

Exercício 4.41 (*Carro freando*). A posição $s(t)$ de um carro que freia bruscamente é dada por:

$$s(t) = \begin{cases} -5t^2 + 40t, & \text{se } t < 4, \\ 80, & \text{se } t \geq 4. \end{cases}$$

- (a) O carro pára suavemente ou de forma abrupta?
- (b) A função posição é derivável em $t = 4$?

Exercício 4.42 (*Impacto da bola lançada pra cima*). A posição de uma bola após ser lançada é descrita por:

$$s(t) = \begin{cases} -5t^2 + 20t, & \text{se } 0 \leq t \leq 4, \\ 20, & \text{se } t > 4. \end{cases}$$

Interprete o comportamento da função. O que representa o ponto $t = 4$? A função é derivável nesse ponto?

Exercício 4.43 (*Aquecimento controlado*). Um forno industrial aquece uma peça com a seguinte função de temperatura:

$$T(t) = \begin{cases} kt, & \text{se } t \leq 10, \\ 100, & \text{se } t > 10. \end{cases}$$

- (a) Para qual valor de k a função será contínua em $t = 10$?
- (b) Para qual valor de k ela também será derivável?
- (c) O que representaria uma não derivabilidade nesse ponto?

Seção 4.5 – Diferencial

Exercício 4.44 (*Aproximação linear logarítmica*). Use a aproximação linear da função $f(x) = \ln(x)$ em torno de $a = 1$ para estimar o valor de $\ln(1,05)$.

Exercício 4.45 (*Estimando exponenciais*). O crescimento de uma população segue $P(t) = e^{0,03t}$, em que t é o tempo em anos. Use aproximação linear para estimar o crescimento entre os anos $t = 10$ e $t = 10,1$.

Exercício 4.46 (*Ajuste no cubo*). Um cubo tem seu volume modificado de 27 cm^3 para $27,3 \text{ cm}^3$. Use a aproximação linear da função $V(x) = x^3$ para estimar a nova aresta do cubo após o incremento de volume.

4.8 Resoluções dos Problemas

Seção 4.1 – Definição

Problema 4.1

Usando a definição de derivada para $f(x) = \cos(x)$, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(h)\sin(x) - \cos(x)}{h} \\ &= \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) - \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(h)}{h} \right) \\ &= -\sin(x), \end{aligned}$$

onde usamos os resultados dos limites fundamentais trigonométricos do Exemplo 3.2 e do problema 3.16.

Problema 4.2

Dado $f(x) = \tan(x)$, pela definição de derivada, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \tan(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan(x) + \tan(h)}{1 - \tan(x)\tan(h)} - \tan(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x) + \tan(h) - \tan(x) + \tan^2(x)\tan(h)}{h(1 - \tan(x)\tan(h))} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \tan(h) \frac{(1 + \tan^2(x))}{h(1 - \tan(x)\tan(h))} \\ &= \sec^2(x) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(h)} \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \tan(x)\tan(h)} \right) \\ &= \sec^2(x), \end{aligned}$$

onde, na penúltima linha, desmembramos a tangente como a razão entre seno e cosseno e usamos que o limite do produto é o produto dos limites.

Problema 4.3

Posto que $f(x) = 1/x$, da definição de derivada segue que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{-h}{(x+h)x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x(x+h)} \\
 &= -\frac{1}{x^2}.
 \end{aligned}$$

Problema 4.4

Dado que $f(x) = \sin(2x)$, segue da definição de derivada que:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(2x+2h) - \sin(2x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)\cos(2h) + \sin(2h)\cos(2x) - \sin(2x)}{h} \\
 &= \sin(2x) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(2h) - 1}{h} \right) + \cos(2x) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2h)}{h} \right) \\
 &= 2\cos(2x).
 \end{aligned}$$

Aqui, novamente, usamos os resultados dos limites clássicos trigonométricos do Exemplo 3.2 e do problema 3.16. É sugerido ao leitor rever o problema 3.2 para um estudo sobre a variação dos limites trigonométricos clássicos.

Problema 4.5

Ora, dado que $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$, pela regra do quociente, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\tan(x)) &= \frac{1}{\cos^2(x)} \left(\frac{d}{dx}(\sin(x)) \cos(x) - \sin(x) \frac{d}{dx}(\cos(x)) \right) \\
 &= \frac{1}{\cos^2(x)} (\cos^2(x) + \sin^2(x)) \\
 &= \sec^2(x).
 \end{aligned}$$

Problema 4.6

É possível computarmos essa derivada de duas formas. Primeiro, usando a regra do produto e considerando $x^3 \sin(x)\sqrt{x}$ como uma função, de modo que

$$\frac{d}{dx}(x^3 \sin(x)\sqrt{x}) = \sqrt{x} \frac{d}{dx}(x^3 \sin(x)) + (x^3 \sin(x)) \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

e, na sequência, aplica-se mais uma regra do produto para o cálculo da derivada de $x^3 \sin(x)$.

Outro caminho seria, na verdade, juntar os termos $x^3 \sqrt{x} = x^{7/2}$, tornando o produto de três termos para apenas dois, de modo que:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(x^{7/2} \sin(x)) &= x^{7/2} \frac{d}{dx}(\sin(x)) + \sin(x) \frac{d}{dx}(x^{7/2}) \\
 &= x^{7/2} \cos(x) + \frac{7}{2} x^{5/2} \sin(x) \\
 &= \frac{\sqrt{x}}{2} (2x^3 \cos(x) + 7x^2 \sin(x)).
 \end{aligned}$$

Problema 4.7

Queremos provar que, dadas funções diferenciáveis $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x))}{g(x)^2},$$

desde que $g(x) \neq 0$.

Para começar, vamos relembrar as equações das derivadas de f e g :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \\ \frac{d}{dx}(g(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \end{cases}$$

Assim, se multiplicarmos a primeira equação por $g(x)$ e a segunda por $f(x)$, e subtrairmos os resultados, obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)) &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(f(x+h) - f(x))g(x)}{h} - \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - \cancel{f(x)g(x)} - f(x)g(x+h) + \cancel{f(x)g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}, \end{aligned}$$

e, como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)}{g(x+h)} = 1$,

$$\begin{aligned} &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)^2}{g(x)g(x+h)} \right) \\ &= g(x)^2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)}}{h} \\ &= g(x)^2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= g(x)^2 \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right). \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x))}{g(x)^2},$$

como queríamos. ■

Seção 4.2 - Derivadas Elementares

Problema 4.8

Sendo $f(x) = \cot(x) = \cos(x)/\sin(x)$, pela regra do quociente, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cot(x)) &= \frac{1}{\sin^2(x)} \left(\frac{d}{dx}(\cos(x)) \sin(x) - \cos(x) \frac{d}{dx}(\sin(x)) \right) \\ &= \frac{1}{\sin^2(x)} (-\sin^2(x) - \cos^2(x)) \\ &= -\csc^2(x).\end{aligned}$$

Problema 4.9

Dado $f(x) = \sec(x) = 1/\cos(x)$, pela regra do quociente tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sec(x)) &= \frac{1}{\cos^2(x)} \left(\frac{d}{dx}(1) \cdot \cos(x) - 1 \cdot \frac{d}{dx}(\cos(x)) \right) \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} (0 + \sin(x)) \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \frac{1}{\cos(x)} \\ &= \tan(x) \sec(x).\end{aligned}$$

Seção 4.3 - Regra da Cadeia e Derivação Implícita

Problema 4.10

Temos

$$\frac{d}{d\Box}(\sqrt{\Box}) = \frac{1}{2\sqrt{\Box}}.$$

Logo, pela Regra da Cadeia, teremos

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{\Box}) = \frac{1}{2\sqrt{\Box}} \frac{d\Box}{dx}.$$

Ou seja, para a função $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sqrt{\cos(x)}) &= \frac{1}{2\sqrt{\cos(x)}} \frac{d}{dx}(\cos(x)) \\ &= -\frac{\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}.\end{aligned}$$

Problema 4.11

Note que temos três funções em jogo:

$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = \sin(x) \quad \text{e} \quad h(x) = x^2.$$

A função em questão é $f(h(g(x))) = \ln(\sin^2(x))$. Logo, pela Regra da Cadeia — aplicada duas vezes —, tem-se:

$$\frac{d}{dx}(f(h(g(x)))) = \frac{df}{dh} \frac{dh}{dg} \frac{dg}{dx}.$$

Note, mais uma vez, como a notação de Leibniz deixa tudo bastante intuitivo, como se fosse apenas uma identidade algébrica. Neste caso, a primeira derivada df/dh nos indica a derivar o logaritmo natural $f(x) = \ln(x)$ em relação ao argumento da função de dentro, ou seja, a derivada será o inverso da função:

$$\frac{d}{d\Box}(\ln \Box) = \frac{1}{\Box}.$$

A segunda derivada, dh/dg , nos indica a derivar a função $h(x) = x^2$ em relação ao argumento da função de dentro, $g(x)$, ou seja:

$$\frac{d}{d\Box}(\Box^2) = 2\Box.$$

A terceira derivada, dg/dx , é bem direta: é a derivada da função mais interna, isto é, $g(x) = \sin(x)$, em relação ao argumento interno, que é próprio x , o que é direto:

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x).$$

Juntando tudo isso, teremos:

$$\frac{d}{dx}(\ln(\sin^2(x))) = \underbrace{\frac{1}{\sin^2(x)}}_{df/dh} \cdot \underbrace{2 \sin(x)}_{dh/dg} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{dg/dx} = 2 \cot(x).$$

Problema 4.12

Sendo $y = \arccos(x)$, segue que $x = \cos(y)$. Derivando esta última relação implicitamente com respeito a x — uma vez que procuramos quanto vale dy/dx —, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(\cos(y)) \\ 1 &= -\sin(y) \frac{dy}{dx}, \end{aligned}$$

de onde vem que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin(y)}.$$

De $x = \cos(y)$ e da Relação Fundamental da Trigonometria, segue que $\sin(y) = \sqrt{1-x^2}$. Logo,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Problema 4.13

Sendo $y = \arctan(x)$, segue imediatamente que $\tan(y) = x$. Esta última relação, derivada implicitamente com respeito a x , nos leva a:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan(y)) &= \frac{d}{dx}(x) \\ \sec^2(y) \frac{dy}{dx} &= 1,\end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2(y)}.$$

Sendo $x = \tan(y)$, a Relação Fundamental da Trigonometria diz que $\sec^2(y) = 1 + \tan^2(y) = 1 + x^2$, donde segue que

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}.}$$

Problema 4.14

Dado $y = \ln(x)$, segue, por definição, que $e^y = x$. Derivando implicitamente os dois lados dessa última expressão em relação a x , tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^y) &= \frac{d}{dx}(x) \\ e^y \frac{dy}{dx} &= 1,\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Seção 4.4 - Derivabilidade e Continuidade

Problema 4.15

Temos $f(1) = 1$ e que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1).$$

Logo, concluímos que $f(x)$ é contínua em $x = 1$. Contudo, vale lembrar que continuidade não implica em derivabilidade, mas sim o contrário. Com isso, não podemos dizer se f é ou não derivável em $x = 1$. Teremos que atacar a derivabilidade da função diretamente. Tomando a derivada, tem-se:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \leq 1, \\ 2, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Sendo a derivada um limite, vemos que os limites laterais em $x = 1$ existem e coincidem, isto é

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 2,$$

de modo que f é de fato derivável em $x = 1$.

Problema 4.16

(i) Continuidade

Para que f seja contínua em $x = 1$, é preciso que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4a + b = f(2) = \ln(4).$$

Além disso, devemos ter também:

$$\ln(4) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = \ln(4),$$

que é imediatamente satisfeito. Logo, quaisquer valores de a e b tais que

$$4a + b = \ln(4)$$

fazem com que f seja contínua em $x = 2$.

(ii) Derivabilidade

Para que f seja derivável em $x = 2$, é preciso que os limites que definem a derivada existam e coincidam se nos aproximarmos por 2 pela direita ou pela esquerda. Isto é, de

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax, & \text{se } x < 2, \\ \frac{1}{x+2}, & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$$

concluimos que é preciso ter

$$f'_-(2) = 4a = f'_+(2) = \frac{1}{4}.$$

Logo, sendo $a = 1/16$, como derivabilidade deve implicar em continuidade, é preciso, ainda, satisfazer a condição de que f seja contínua em $x = 2$, ou seja, que $(4a + b) = \ln(4)$, donde segue que $b = \ln(4) - 1/4$. Logo, para

$$a = \frac{1}{16} \quad \text{e} \quad b = \ln(4) - \frac{1}{4},$$

a função $f(x)$ será diferenciável em $x = 2$.

Seção 4.5 - Diferencial

Problema 4.17

Computando a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$, teremos $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Queremos encontrar $f(36 + 0,7)$. A aproximação linear a partir de $x = 36$ fornece que

$$f(36 + \Delta x) \approx f(36) + f'(36)\Delta x,$$

ou seja, segue que

$$f(36 + \Delta x) \approx \sqrt{36} + \frac{1}{2\sqrt{36}}\Delta x,$$

de modo que, para Δx pequeno, a aproximação é

$$f(36 + \Delta x) \approx 6 + \frac{1}{12}\Delta x.$$

Fazendo $\Delta x = 0,7$, somos levados a $f(36,7) = \sqrt{36,7} \approx 6,0583$. A título de comparação, o valor exato, até a quarta casa decimal, é $\sqrt{36,7} = 6,0580$.

Problema 4.18

Quando tratamos dy/dx como se fosse uma fração, somos levados, através da Álgebra, à relação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}. \quad (4.23)$$

Contudo, o que tal relação pressupõe é que existe uma função $y(x)$ tal que

- (i) $y(x)$ é derivável, sendo sua derivada dada por $y'(x) = \frac{dy}{dx}$;
- (ii) $y(x)$ é invertível, sendo sua inversa dada por $x(y)$;
- (iii) a inversa $x(y)$ é derivável, sendo sua derivada denotada por $x'(y) = \frac{dx}{dy}$.

Por fim, sendo estes três critérios satisfeitos, a Equação (4.23) diz que a derivada de $y(x)$ em relação à variável x está relacionada à derivada de $x(y)$ em relação à y , sendo uma o inverso algébrico da outra. Ou seja, é algo bem mais profundo do que apenas escrever

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}.$$

De modo geral, a Equação (4.23) não é válida sempre, apenas quando os 3 critérios acima são satisfeitos. Desse modo, apesar de a notação de Leibniz ser bastante intuitiva e nos levar a resultados corretos através de manipulações algébricas de dx e dy como se estes fossem apenas números a e b , é preciso tomar cuidado e entender que dx e dy não são apenas números quaisquer e que nem toda manipulação algébrica feita com eles nos levará a uma verdade absoluta que não leve em conta a natureza desses objetos matemáticos.

Capítulo 5

Derivadas: Aplicações

Conta-se que, certa vez, Isaac Newton foi questionado sobre o que exatamente havia inventado ao criar o Cálculo, no que ele respondeu que havia descoberto uma maneira de *medir o movimento no instante em que ele acontece*. Essa resposta, quase poética, sintetiza o poder das derivadas: elas nos permitem observar e compreender a variação — não depois que ela ocorre, mas enquanto está acontecendo.

Neste capítulo, exploraremos como essa ideia se traduz em problemas concretos. Veremos como derivadas revelam máximos e mínimos de funções, como ajudam a otimizar situações do cotidiano, como descrevem o comportamento de curvas e como se conectam com outras áreas do conhecimento.

5.1 Taxas Relacionadas

Em muitos problemas do mundo real, grandezas variam ao longo do tempo de forma **interdependente**: o raio de uma esfera e seu volume, o nível da altura de água em um tanque e o seu volume, o tamanho da sombra de uma pessoa com a sua posição.

Esses são exemplos de situações com taxas relacionadas — ou seja, situações em que duas ou mais variáveis dependem do tempo e estão ligadas entre si por alguma relação geométrica ou física. Nessas situações, mesmo que não conheçamos cada variável em função do tempo, podemos usar a derivada implícita com a Regra da Cadeia para descobrir como a variação de uma delas afeta a outra.

Exemplo 5.1

Uma bolha de sabão perfeitamente esférica tem seu raio sendo aumentado a uma taxa de 1 cm/s. Qual é a taxa com que seu volume aumenta quando o raio medir 4 cm?

A relação entre o raio R de uma esfera e o seu volume V é dada por

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad (5.1)$$

Evidentemente, uma mudança no raio R afeta o volume V : essas duas grandezas estão relacionadas. Queremos, contudo, a relação entre a taxa dV/dt com que o volume muda e a taxa $dR/dt = 1$ cm/s com que o raio cresce com o tempo. Para obter uma relação entre as taxas de variação de tais grandezas, derivamos os dois lados da Equação (5.1) em relação ao tempo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 \frac{dR}{dt}. \quad (5.2)$$

Ora, a Equação (5.2) pode ser escrita de forma sucinta como

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt},$$

que mostra que a taxa de variação dV/dt do volume da esfera depende tanto do valor específico de R em um certo instante, como também da velocidade dR/dt com que esse raio cresce. Munido de tais valores, quando $R = 4$ cm, teremos

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(4 \text{ cm})^2 \cdot 1 \text{ cm/s} = 16\pi \text{ cm}^3/\text{s},$$

isto é, quando o raio tiver exatamente 4 cm, essa será a taxa instantânea de crescimento do volume da esfera.

A estratégia geral usada para resolver problemas de taxas relacionadas, como fizemos no Exemplo 5.1, consiste em

- (i) Identificar as variáveis que mudam com o tempo.
- (ii) Relacionar essas variáveis por uma equação geométrica, física ou algébrica.
- (iii) Derivar essa equação em relação ao tempo t , usando a Regra da Cadeia.

Por fim, basta substituir os valores conhecidos das variáveis e das suas taxas de variação no instante considerado e resolver o problema.

Exemplo 5.2

Uma escada de tamanho L está escorregando, mantendo sempre uma extremidade apoiada na parede e a outra no chão. Se a velocidade horizontal do ponto da escada em contato com o chão é constante e igual a v , qual é a velocidade vertical do ponto superior da escada quando este estiver a uma altura h do chão?

Seja o ponto da escada em contato com o chão dado por $(x, 0)$ e o ponto da escada

em contato com a parede dado por $(0, y)$, como mostra a Figura 5.1.

A relação entre tais dimensões e o comprimento L da escada, como a figura evidencia, é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = L^2.$$

Sabendo que a taxa com que a posição x muda com o tempo é constante e dada por $dx/dt = v$, queremos obter a taxa dy/dt com que a parte superior da escada desce, no instante em que $y = h$. Derivando a expressão pitagórica, somos levados a

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2L \frac{dL}{dt},$$

em que $dL/dt = 0$, posto que L é constante, e $dx/dt = v$, donde segue que

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}v.$$

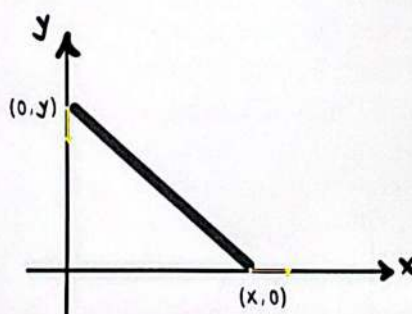


Figura 5.1: A escada escorregando.

Vemos que a velocidade da parte da escada apoiada na parede depende tanto da velocidade horizontal v , da parte apoiada no chão, como também do instante considerado, uma vez que este determina os valores de x e y . No instante em que $y = h$, o Teorema de Pitágoras nos diz que $x = \sqrt{L^2 - h^2}$, de tal modo que a velocidade vertical da parte superior da escada neste instante fica sendo

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{h}v.$$

Note que tal taxa é negativa, o que é natural, uma vez que, tendo definido a orientação do eixo vertical para cima, vemos que o ponto da escada em contato com a parede vertical escorrega para baixo, o que se traduz matematicamente pelo sinal negativo na velocidade dy/dt .

5.2 O Teorema do Valor Médio e Problemas de Otimização

Entramos aqui no que provavelmente seja a seção mais importante do capítulo, ou, pelo menos, a seção que tratará dos problemas de maior aplicabilidade do Cálculo Diferencial. O Teorema do Valor Médio (TVM) relaciona a taxa de variação instantânea dy/dx de uma função $y(x)$ com a sua taxa de variação média $\Delta y/\Delta x$ em um certo intervalo, ou seja, relaciona a versão “macroscópica” e a versão “microscópica” (infinitesimal) de uma certa grandeza matemática, o coeficiente angular. Antes de entrarmos no TVM, enunciaremos primeiramente um outro, um pouco mais intuitivo: o Teorema de Rolle, que se mostrará um caso particular do TVM, como mostraremos no final da seção.

5.2.1 Teorema de Rolle e Problemas de Otimização

O Teorema de Rolle nos diz sobre o comportamento da derivada em pontos de máximos e mínimos. Em poucas palavras, ele diz que, se tivermos uma função $f(x)$ derivável em um certo intervalo (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$, devemos ter pelo menos um ponto c tal que $f'(c) = 0$. A Figura 5.2 ilustra este fato, onde há, no caso, dois pontos em que $f'(c) = 0$ — um máximo e um mínimo local.

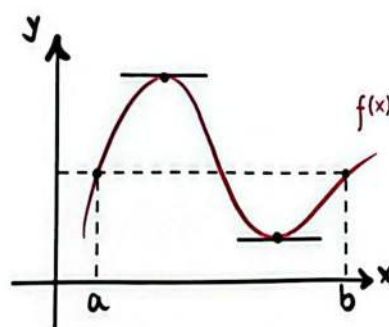


Figura 5.2: O Teorema de Rolle.

Dada a ampla discussão já feita a respeito do significado geométrico da derivada, o leitor pode estar, de imediato, facilmente convencido a respeito do significado e da validade do teorema, que essencialmente diz que

- (i) Nos pontos de máximo ou mínimo da função, a sua derivada é nula.
- (ii) Entre dois pontos $x = a$ e $x = b$ tais que a função possui o mesmo valor, ela, sendo suave (derivável e contínua), precisa passar por algum máximo ou mínimo.

O ponto (i) é bem direto: dado que a derivada representa o coeficiente angular da reta que tangencia a função em um dado ponto, é fácil perceber que, em um ponto de máximo ou mínimo, a reta tangente à curva será horizontal, de tal modo que seu coeficiente angular — sua derivada — será nula naquele ponto.

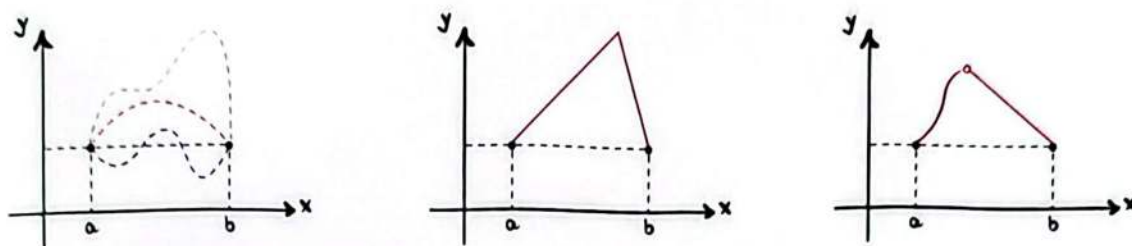


Figura 5.3: Sem abrir mão de continuidade e derivabilidade, é impossível que não haja algum ponto c tal que $f'(c) = 0$.

O ponto (ii) pode ser facilmente compreendido caso o leitor queira encarar o seguinte desafio: tente desenhar uma função (derivável e, portanto, contínua) em um certo intervalo tal que nos extremos do intervalo a função assuma o mesmo valor, ou seja $f(a) = f(b)$, porém, sem que haja nenhum máximo ou mínimo¹ entre a e b . A Figura 5.3 mostra os rascunhos de quem topou este desafio. A primeira imagem mostra, em linhas pontilhadas, algumas possibilidades de curvas em que $f(a) = f(b)$. Note que, em todas elas, temos ao menos um máximo ou mínimo no intervalo. A imagem do meio, por conter uma quina, quebra a condição de diferenciabilidade de f no intervalo, o que, também, ocorre para a última imagem, que, por meio de uma descontinuidade (e, consequentemente, uma quebra da derivabilidade), tornou possível construir um gráfico sem nenhum ponto em que $f'(x) = 0$. Ao brincar um pouco com esses rascunhos, o leitor facilmente se convencerá de que só será possível construir uma função sem máximo e mínimo entre a e b , com $f(a) = f(b)$, por meio de alguma descontinuidade e/ou quebra da derivabilidade no intervalo.

Dito isso, acredito que tenha ficado bastante intuitivo o conteúdo do teorema, de modo que exploraremos alguns problemas e resultados oriundos dele, deixando sua demonstração formal e alguns detalhes técnicos para o final.

Teorema de Rolle

Teorema. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, então existe ao menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0.$$

Na Seção 2.2 já havíamos introduzido uma importante aplicação do estudo de derivadas, que é a de calcular máximos ou mínimos de funções. De modo geral, esse é um problema clássico do Cálculo Diferencial, que consiste em otimizar algum procedimento e, por isso, é chamado de **problema de otimização**.

¹Daqui a pouco vamos formalizar essa definição. Por hora, pense em um máximo ou mínimo como um ponto de uma função em que a derivada é zero, como no vértice uma parábola. Veremos também em breve que ter derivada nula não implica exatamente ser ponto de máximo ou mínimo, mas essa conversa pode ser postergada em um primeiro momento.

Dado o significado geométrico da derivada, encontrar um ponto de máximo ou mínimo, ou seja, um ponto no qual a reta que tangencia a função é horizontal, é simplesmente procurar o(s) ponto(s) no qual a derivada é zero.

Exemplo 5.3

Considere um retângulo inscrito em uma semicircunferência de raio R . Qual é a maior área possível de tal retângulo?

Considere um retângulo de base x e altura y . A primeira imagem da Figura 5.4 mostra algumas formas de se inscrever este retângulo na semicircunferência. A imagem da direita nos permite obter uma relação geométrica entre o retângulo e a circunferência que será sempre válida, dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$R^2 = \frac{x^2}{4} + y^2 \implies y^2 = R^2 - \frac{x^2}{4}.$$

Ora, a área do retângulo é dada por

$$A = xy,$$

que, com a expressão de y em função de x , se torna

$$A(x) = x\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

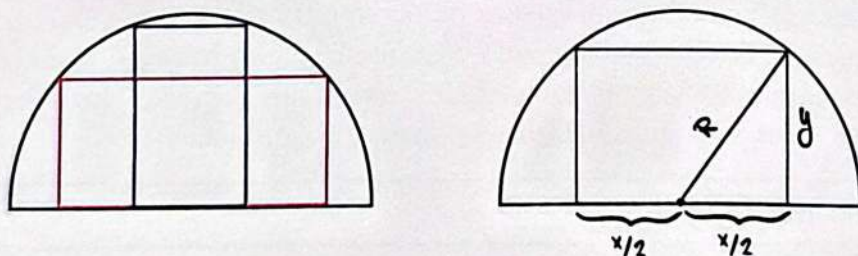


Figura 5.4: Retângulo inscrito na semicircunferência.

Derivando tal expressão e igualando a zero, encontraremos os máximos e mínimos de tal função:

$$\frac{dA}{dx} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} + x \frac{1}{2\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}} \left(-\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Resolvendo a expressão acima, encontramos que $x = R\sqrt{2}$, de onde obtemos que $y = R\sqrt{2}/2$. Essas são as dimensões do retângulo inscrito na semicircunferência que maximizam sua área.

Note que, duplicando a figura e completando a circunferência com a sua outra metade, o retângulo mantém sua largura $x = R\sqrt{2}$ e passa a ter uma altura $h = 2y = R\sqrt{2}$, ou seja, o retângulo de área máxima inscrito em uma circunferência é um quadrado.

Exemplo 5.4

Considere um recipiente cilíndrico, fechado nos dois extremos, que deve ser construído para ter volume V . Quais devem ser suas dimensões de modo a minimizar a quantidade de material usado em sua construção?

Sendo R o raio da base do cilindro e h sua altura, seu volume V é dado por

$$V = \pi R^2 h. \quad (5.3)$$

A sua área total é dada por

$$A = 2\pi R^2 + 2\pi Rh,$$

de modo que, isolando h na Equação (5.3) e substituindo na relação acima, teremos

$$A(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

Buscamos encontrar um mínimo da expressão acima, ou seja, buscamos minimizar a quantidade de material. Isso ocorrerá quando

$$\frac{dA}{dR} = 4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0,$$

isto é, quando tivermos

$$R = \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{1/3}.$$

Usando esse resultado na Equação (5.3), obtemos o valor de sua altura, como função de V . Assim, dado o volume V , temos em mãos as dimensões do cilindro que minimizam a sua área, ou seja, o material utilizado em sua construção.

O leitor poderia se perguntar, ao resolver o exemplo anterior:

Como posso saber que os valores de R e h encontrados se referem a um mínimo da função, e não a um máximo?

Essa seria uma excelente pergunta, uma vez que o ponto de derivada nula pode ser tanto um máximo quanto um mínimo. Primeiramente, com o que temos até aqui, poderíamos concluir que tais condições fornecem um mínimo pelo **contexto do problema**: como o cilindro tem volume finito V , deve haver algum modo — entre todas as infinitas formas de construí-lo — de gastar a menor quantidade possível

de material para fazê-lo. A mesma interpretação cabe no Exemplo 5.3: o fato de o retângulo estar inscrito em uma região limitada, isto é, em uma semicircunferência de raio R , implica que certamente sua área será limitada, de modo que a expressão da área deve admitir um valor máximo — o maior retângulo possível que cabe naquela região limitada. Com isso, concluímos que a função $A(x)$ deve possuir um máximo e, ao derivá-la e igualar a zero, pressupomos que estamos obtendo tal ponto.

Por hora, com o que construímos até aqui, essa será a forma de sabermos se obteremos um máximo ou um mínimo ao derivar e igualar a zero: pelo contexto e pela interpretação do problema. Após o estudo da derivada segunda, que será feito em uma seção futura, teremos em mãos uma ferramenta que nos possibilitará, de forma matematicamente rigorosa, descobrir quando se trata de um máximo ou um mínimo.

Essa conversa nos dá uma boa deixa para formalizar melhor alguns termos. Primeiro, vamos a um alerta. Considere a função $f(x) = x^3$. Ao derivar e igualar a zero, teremos $f'(x) = 3x^2 = 0$, cuja solução é $x = 0$. Contudo, como mostra a Figura 5.5, em $x = 0$ há algo estranho: olhando pela esquerda, parece que é um máximo, mas, olhando pela direita, parece que é um mínimo. No fundo, tal ponto não é máximo nem mínimo da função, o que nos indica ao menos dois fatos:

- (i) Fazer $f'(x) = 0$ nos permite obter máximos e mínimos de funções, mas nem sempre tais soluções darão um máximo ou mínimo.
- (ii) Precisamos definir melhor o que é um máximo ou mínimo, dado que dizer que são pontos tais que $f'(x) = 0$ parece não ser suficiente.

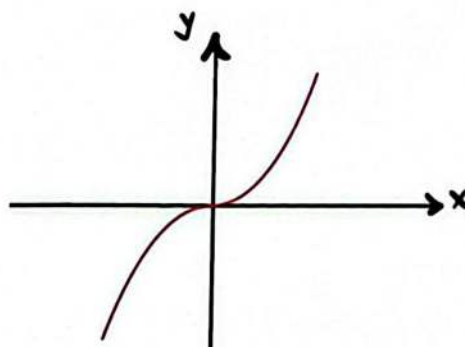


Figura 5.5: Ponto de derivada nula da função $f(x) = x^3$.

Definição 5.1: Máximos e Mínimos Locais

Dizemos que a função $f(x)$ admite um

- máximo local em c se $f(c) \geq f(x)$ quando x está próximo de c ;
- mínimo local em c se $f(c) \leq f(x)$ quando x está próximo de c .

Note que, baseado na Definição 5.1, é fácil ver por que o ponto $x = 0$ na função $f(x) = x^3$ não é máximo nem mínimo local: não é possível pegar uma região, por

menor que seja, tal que $f(0)$ é maior ou menor do que qualquer valor de f no entorno dessa região — se nos aproximamos de 0 pela direita, a origem parece ser um mínimo, mas se nos aproximamos pela esquerda, ela parece ser um máximo.

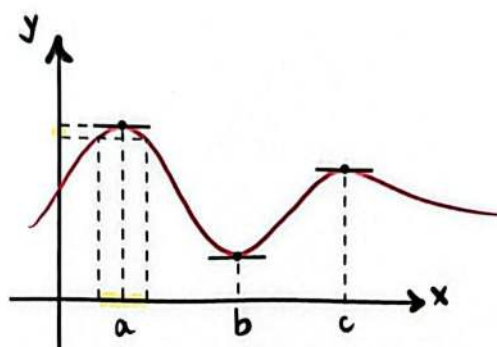


Figura 5.6: Máximos e mínimos locais.

Dito isso, um máximo ou mínimo local, como indica a Figura 5.6, é um ponto em que a derivada é nula, de modo que eles podem ser encontrados pelas soluções da equação $f'(x) = 0$:

$$f(c) \text{ é máximo ou mínimo local} \implies f'(c) = 0.$$

Contudo, como vimos, ser solução de tal equação não implica ser máximo ou mínimo local, ou seja, a volta não é necessariamente verdadeira. É natural que possamos deixar a Definição 5.1 matematicamente mais rigorosa. Para o leitor que leu a última seção do Capítulo 3, já deve ser natural como fazê-lo: x estar próximo de c significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um δ tal que

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(c) - f(x)| < \varepsilon.$$

A Figura 5.6 deixa isso claro para o ponto $x = a$, em que se vê que $f(a)$ é um máximo local: pegando pontos suficientemente próximos de a vemos que suas imagens são sempre menores que $f(a)$. Isso, também, poderia ser notado para os pontos $x = b$, onde temos em $f(b)$ um mínimo local, e o ponto $x = c$, no qual vê-se que $f(c)$ é outro máximo local.

Entretanto, não queremos, a essa altura, usar um rigor excessivo para ideias matemáticas que pareçam razoáveis. Sigamos, portanto, na formalização de alguns conceitos.

Definição 5.2: Máximos e Mínimos Globais

Seja $f(x): D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que a função admite um

- máximo global (ou absoluto) em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D$;

- mínimo global (ou absoluto) em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D$.

Essa definição diz que, se $f(c)$ é máximo ou mínimo absoluto, não existe nenhum valor de x no domínio da função tal que $f(x)$ seja maior ou menor que $f(c)$, respectivamente. Máximos e mínimos absolutos são, também, chamados de **valores extremos** da função, uma vez que, pela definição, eles delimitam superior e inferiormente os valores da imagem da função. A Figura 5.7 mostra o gráfico de uma função, cujo domínio é $x = [0, 1]$. Neste caso, vemos que $f(a)$ e $f(b)$ são, respectivamente, um máximo e um mínimo local. Já $f(0)$ é mínimo absoluto, enquanto $f(1)$ é máximo absoluto.

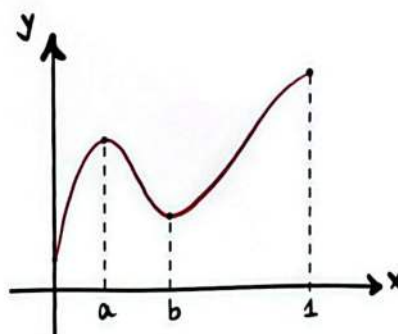


Figura 5.7: Máximos e mínimos locais e globais.

Talvez seja fácil o leitor se convencer de que toda função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ possuirá máximos e mínimos absolutos. A Figura 5.8 mostra isso para três funções distintas, contínuas e definidas no mesmo intervalo $[a, b]$. Note que, neste intervalo definido, mesmo a função mais simples — a função afim da primeira imagem — possui máximo e mínimo absolutos, no caso, $f(b)$ e $f(a)$, respectivamente. Tais valores podem, no entanto, não se localizar nos extremos do intervalo, como é o caso da segunda imagem da mesma figura: $f(a)$ e $f(b)$ não são máximos nem mínimos absolutos. Os máximos e mínimos absolutos dessa função são, respectivamente, o ponto de quina no qual a derivada não está definida e o ponto no qual $f'(x) = 0$. Já a

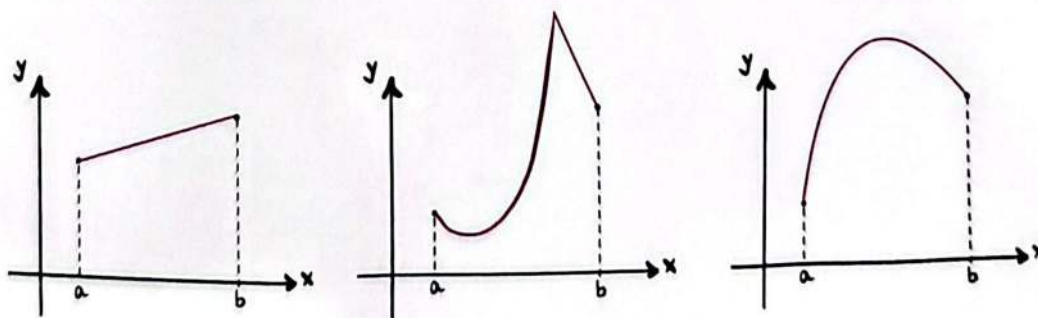


Figura 5.8: O Teorema do Valor Extremo.

terceira imagem da figura possui mínimo absoluto sendo $f(a)$, como na função afim; porém, o máximo absoluto ocorre no ponto em que $f'(x) = 0$ e não em $f(b)$.

Esse resultado, a que se deu o honroso nome de Teorema de Weierstrass (ou também Teorema do Valor Extremo), tem lá sua importância — e não sou eu quem vai negá-la. Se, depois da breve digressão que fizemos, o leitor o considerar natural, quase óbvio, dou-me por satisfeito: sinal de que cumpri bem meu papel. Não comecei essa tarefa por capricho, mas por necessidade, pois, se o enunciado parece simples, a demonstração já não o acompanha no mesmo passo. Ela exige noções de supremo e ínfimo — personagens que o leitor pode encontrar em qualquer bom livro de Análise Real, mas que fogem do escopo deste curso.

Teorema do Valor Extremo

Teorema. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **contínua** no intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Então, f atinge **máximo e mínimo absolutos** neste intervalo. Ou seja, existem os pontos $x_{\min}$ e $x_{\max}$ no intervalo $[a, b]$ tais que

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Note que um máximo ou mínimo absoluto não precisa ser, necessariamente, um ponto no qual $f'(x) = 0$, como a Figura 5.8 deixa claro.

Considere a função $f(x) = x^2$. Neste caso, $x = 0$ é mínimo global, como é fácil de ver pelo seu gráfico. Isso ocorre porque $f(0) \leq f(x)$ para qualquer x no domínio de f .

Por fim, chamaremos de **valores críticos** da função f os números c para os quais $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existir. Logo, se $f(c)$ é máximo ou mínimo local, então c é um valor crítico de f .

Demonstrações

Esta seção inteira foi escrita com a intenção de clarear e tornar mais intuitivas as ideias principais. Se tive êxito, o que deixo ao juízo do leitor, a próxima parte poderá ser vista quase como supérflua: um agrado a quem já vinha se deliciando com estas páginas, ou talvez um consolo aos espíritos mais desconfiados, que ainda não se renderam aos encantos da demonstração.

Primeiro, **provemos que, no ponto $x = c$ de máximo ou mínimo, devemos ter $f'(c) = 0$.**

Partimos da premissa de que f é derivável no intervalo (a, b) que contém c . Logo, ela é, também, contínua, de modo que podemos dizer que existe h_0 tal que os pontos no intervalo $(c - h_0, c + h_0)$ que estão contidos em (a, b) pertencem ao domínio de f . Consideremos, sem perda de generalidade, que c é um ponto de máximo. Logo, tem-se

$$f(c) \geq f(c + h), \text{ para } h \in (-h_0, h_0).$$

Podemos reescrever tal expressão como

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \text{ se } 0 < h < h_0,$$

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \text{ se } -h_0 < h < 0.$$

Tomando o limite quando $h \rightarrow 0$, teremos

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0,$$

de onde concluímos que só se pode ter $f'(c) = 0$, como queríamos demonstrar. Tal resultado é conhecido como **Teorema de Fermat** e, se o leitor se lembrar bem da discussão histórica sobre o cálculo de máximos e mínimos do Capítulo 2, entenderá o motivo do teorema ser batizado com o nome do francês.

Teorema de Fermat para Máximos e Mínimos

Teorema. Se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem um máximo ou mínimo local em $x = c$ e se f é derivável em c , então

$$f'(c) = 0.$$

Munidos deste resultado, podemos seguir para a demonstração do Teorema de Rolle.

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$. Nosso objetivo é provar que existe ao menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Pelo **Teorema do Valor Extremo**, sabemos que f atinge um *máximo absoluto* e um *mínimo absoluto* no intervalo fechado $[a, b]$. Isso significa que existem pontos $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ tais que:

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}), \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Como $f(a) = f(b)$, temos duas possibilidades:

- Se f for constante em todo o intervalo, então $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, e qualquer ponto interno satisfaz o teorema.
- Se f não for constante, então o máximo ou o mínimo absoluto ocorre em algum ponto interno do intervalo, isto é, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c)$ é um *máximo local* ou *mínimo local*.

Como f é derivável em (a, b) , podemos aplicar o **Teorema de Fermat**, o qual afirma que se uma função tem derivada em um ponto interior onde ela atinge um extremo local, então sua derivada nesse ponto é nula. Assim, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, o que conclui a demonstração. ■

5.2.2 Teorema do Valor Médio

O Teorema do Valor Médio diz, no bom português, que uma função *suave* em um certo intervalo $[a, b]$ possui ao menos um ponto em tal intervalo tal que a reta que tangencia a função neste ponto é paralela à reta que passa pelos pontos que definem os extremos do intervalo, isto é, os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. A Figura 5.9 ilustra essa situação: há ao menos um ponto entre A e B tal que a derivada neste ponto é igual ao coeficiente angular da reta que passa por A e B .

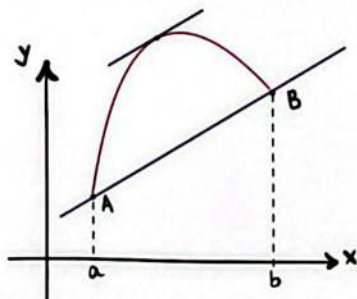


Figura 5.9: A taxa de variação instantânea é igual à taxa de variação média.

Em termos mais matemáticos, estamos dizendo que, para uma função *suave* em um intervalo fechado $[a, b]$, existe ao menos algum ponto em que sua taxa de variação instantânea dy/dx coincide com a taxa de variação média nos extremos $\Delta y/\Delta x$.

Quando dizemos que uma função é *suave* — este é um termo que pode ser definido de forma matematicamente precisa —, trata-se de uma função que pode ser derivada infinitas vezes, sendo suas derivadas sempre contínuas. De modo mais intuitivo — e o termo *suave* carrega bem essa conotação —, trata-se de uma função sem buracos ou saltos (portanto, é contínua) e, também, sem nenhum tipo de *quinas*, *bicos* ou *cantos*, ou seja, ela é diferenciável em todo o seu domínio. O gráfico de uma função assim é, portanto, perfeitamente “liso”, sem qualquer descontinuidade ou comportamento brusco. Exemplos de funções assim são as funções polinomiais ou as funções trigonométricas fundamentais $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$.

Teorema do Valor Médio

Teorema. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **contínua** em $[a, b]$ e **derivável** em (a, b) . Então, existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demonstração

Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Queremos mostrar que existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que a derivada de f em c seja igual à inclinação da reta secante que liga os pontos extremos do gráfico da função.

Para isso, definimos uma função auxiliar:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Note que g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , pois essas propriedades são herdadas de f . Além disso, essa nova função foi construída de modo que a reta secante tenha sido subtraída de f . Vamos agora calcular os valores de g nas extremidades:

$$g(a) = f(a), \quad \text{e} \quad g(b) = f(b) - [f(b) - f(a)] = f(a).$$

Portanto, $g(a) = g(b)$, e podemos aplicar o **Teorema de Rolle**, que garante a existência de $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Calculando $g'(x)$, temos:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Logo:

$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Portanto, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

Note que, como foi dito anteriormente, o Teorema de Rolle é apenas um caso particular do Teorema do Valor Médio, com os pontos $f(a)$ e $f(b)$ alinhados horizontalmente, de modo que deve haver algum ponto entre eles cuja reta tangente seja, também, horizontal. Optamos, contudo, por criar uma função auxiliar para demonstrar o Teorema do Valor Médio usando o resultado de Rolle, o que nos pareceu um caminho mais curto.

O Teorema do Valor Médio é, ao mesmo tempo, uma afirmação matemática precisa e uma reflexão profunda sobre a natureza das variações e da continuidade no mundo real. Ele nos diz que, sempre que uma função for contínua em um intervalo fechado e diferenciável no intervalo aberto, haverá pelo menos um ponto em que sua derivada — ou seja, sua taxa de variação instantânea — coincidirá exatamente com a variação média da função ao longo do intervalo. Isso significa que, por mais tortuosa que seja a trajetória de uma função, por mais que ela oscile ou flutue, ela será, em algum instante, fiel ao seu próprio comportamento médio. É como se a função não pudesse escapar do seu destino estatístico: cedo ou tarde, ela revela um ponto de equilíbrio entre o todo e a parte. Filosoficamente, o teorema expressa uma verdade profunda sobre sistemas contínuos: a ideia de que o instante carrega em si o reflexo do percurso inteiro, de que o local e o global estão inevitavelmente entrelaçados. Em

um exemplo do cotidiano, ele afirma que quem percorre um caminho com uma certa velocidade média em algum momento teve que assumir exatamente essa velocidade, mesmo que não soubesse quando. No mundo do Cálculo, essa conexão entre o comportamento instantâneo (derivada) e o comportamento total (variação entre extremos) é o cerne de teoremas ainda mais amplos, como o Teorema Fundamental do Cálculo. Em certo sentido, o Teorema do Valor Médio nos diz que há sempre um ponto em que o real e o ideal, o pontual e o global, o instante e a média, coincidem — em qualquer sistema contínuo e suave, o todo se manifesta inevitavelmente em alguma parte.

Exemplo 5.5

Dada a função $f(x) = x^2$ e os pontos extremos $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, encontre c tal que $f'(c)$ seja igual à taxa de variação da função entre os extremos especificados.

Calculando a função nos extremos, temos $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, de modo que a taxa de variação média é

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1.$$

Logo, procuramos o ponto x tal que $f'(x)$ seja igual a 1, ou seja:

$$f'(x) = 2x = 1 \implies x = \frac{1}{2}.$$

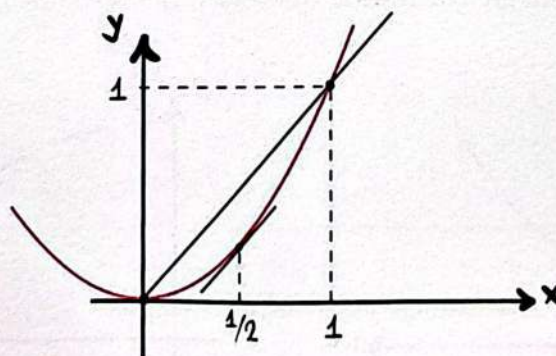


Figura 5.10: Teorema do Valor Médio na função quadrática.

A Figura 5.10 ilustra a geometria do problema resolvido.

Exemplo 5.6

Mostre que $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$.

Aplicando o Teorema do Valor Médio à função $f(x) = \sin(x)$, com $a \leq x \leq b$,

sabemos que deve haver algum ponto c entre a e b tal que

$$f'(c) = \cos(c) = \frac{\sin(b) - \sin(a)}{b - a}.$$

Como $|\cos(c)| \leq 1$, tem-se

$$|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|,$$

como queríamos demonstrar.

5.3 Derivadas e Gráficos

Nessa seção estudaremos como as derivadas de uma função afetam o formato do seu gráfico e montaremos um algoritmo que nos permitirá construir o gráfico de quaisquer funções reais. Tudo o que será construído aqui será, como o leitor notará, aplicações do Teorema do Valor Médio.

5.3.1 A derivada primeira

A derivada primeira $f'(x)$ de uma função $f(x)$, que é a que estudamos até aqui, permite analisar o comportamento de crescimento da função em um dado intervalo. Como mostra a Figura 5.11, uma derivada positiva indica que a função é crescente, enquanto uma derivada negativa indica que ela é decrescente.

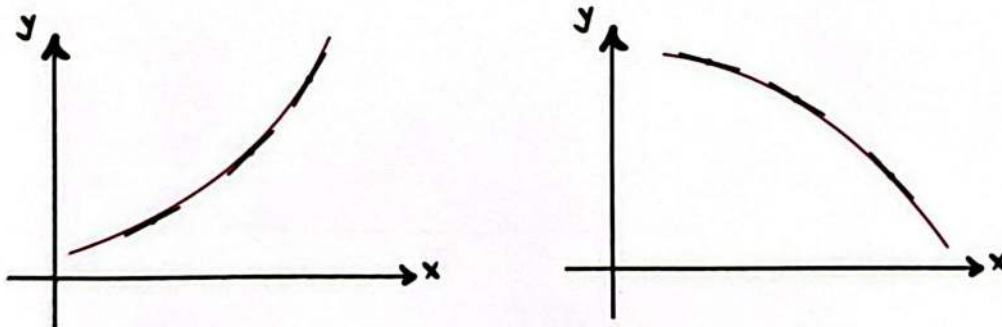


Figura 5.11: A derivada primeira e a taxa de crescimento da função.

Vamos tornar mais preciso este conceito. Seja f uma função diferenciável em um intervalo I . Dizemos que:

- f é **estritamente crescente** em I se, para quaisquer $x_1 < x_2 \in I$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.
- f é **estritamente decrescente** em I se, para quaisquer $x_1 < x_2 \in I$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

A derivada de f pode ser usada para detectar essas propriedades. De forma geral:

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente crescente.
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente decrescente.

Essas afirmações, embora intuitivas, podem ser demonstradas com rigor usando o **Teorema do Valor Médio**.

Demonstração

Façamos a prova para uma função crescente, o outro caso é análogo. Escolha dois pontos quaisquer $x_1 < x_2 \in [a, b]$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $f'(c) > 0$ e $(x_2 - x_1) > 0$, temos $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$. Portanto, f é estritamente crescente. ■

Uma consequência importante é que funções estritamente crescentes são **injetoras**, ou seja, não assumem o mesmo valor duas vezes. Isso implica que a equação $f(x) = c$ tem no máximo uma solução. O problema 5.12 explora esse resultado.

Exemplo 5.7

Suponha que f seja uma função diferenciável em todo $\mathbb{R}$ e que $f'(x) > 0$ para todo x . Suponha ainda que $f(a) = f(b)$ para dois números reais com $a < b$. Mostre que isso leva a uma contradição.

Como f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , podemos aplicar o **Teorema do Valor Médio**, que garante a existência de $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como $f(a) = f(b)$, temos:

$$f'(c) = \frac{0}{b - a} = 0.$$

Contudo, isso contradiz a hipótese de que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, donde concluímos que a suposição de que $f(a) = f(b)$ com $a < b$ é impossível. Logo, uma função com derivada estritamente positiva em todo $\mathbb{R}$ é **estritamente crescente** e, portanto, **injetora** — nunca assume o mesmo valor duas vezes.

Exemplo 5.8

Seja $f(x) = x^3 - 3x$. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f . Em seguida, interprete graficamente os resultados e discuta como o TVM confirma os intervalos obtidos.

Calculando a derivada da função, temos:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

Analizamos o sinal de $f'(x)$ nos intervalos determinados pelos valores críticos $x = -1$ e $x = 1$:

- (i) Para $x < -1$, é fácil ver que $f'(x) > 0$.
- (ii) Para $-1 < x < 1$, nota-se que $f'(x) < 0$.
- (iii) Para $x > 1$, nota-se que $f'(x) > 0$.

Disso, conclui-se que

f é crescente em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ e f é decrescente em $(-1, 1)$.

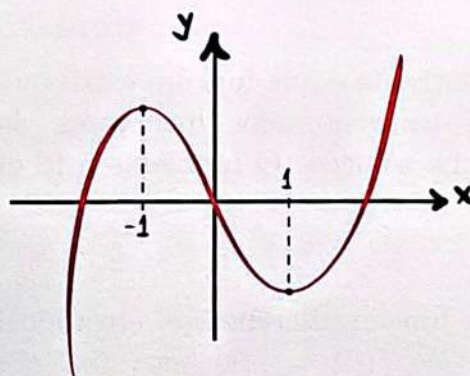


Figura 5.12: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x$.

O gráfico de $f(x) = x^3 - 3x$, como mostra a Figura 5.12, tem a forma de um “N” alongado: cresce, depois decresce, e depois volta a crescer. Os pontos críticos correspondem a um *máximo local* em $x = -1$ e um *mínimo local* em $x = 1$.

5.3.2 A derivada segunda

A derivada segunda $f''(x)$ de uma função f representa a taxa com que sua derivada varia, isto é:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}. \quad (5.4)$$

O que estamos fazendo é tomar a derivada da derivada, isto é

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} f'(x).$$

Quando a derivada $f'(x)$ é crescente, sua taxa de variação será, naturalmente, positiva, uma vez que $f'(x+h) - f'(x) > 0$, o que resulta em um gráfico cuja concavidade é para cima. Isso é mostrado na imagem da esquerda da Figura 5.13. Perceba, analisando a figura, que $f'(x_1) < f'(x_2) < f'(x_3) < f'(x_4) < f'(x_5) < f'(x_6)$, ou seja, se a derivada é estritamente crescente, então, o comportamento do gráfico deve ser côncavo para cima.

Já a imagem da direita da Figura 5.13 mostra o comportamento contrário: aqui notamos que $f'(x_1) > f'(x_2) > f'(x_3) > f'(x_4) > f'(x_5) > f'(x_6)$, ou seja, sempre que $a > b$ vemos que $f'(a) < f'(b)$, sendo a derivada, portanto, estritamente decrescente. Isso indica que a concavidade do gráfico da função deve ser para baixo, como a imagem da figura evidencia.

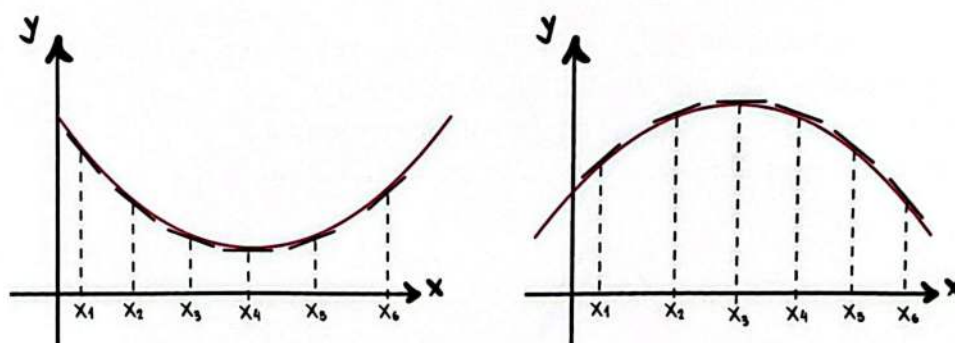


Figura 5.13: Concavidade e derivada segunda.

O que acontece no ponto em que $f''(x) = 0$? Ora, se $f''(x) > 0$ resulta em concavidade para cima e $f''(x) < 0$ resulta em concavidade para baixo, o ponto em que $f''(x)$ se anula deve representar uma transição entre esses dois comportamentos, um ponto no qual a concavidade da função troca: deixa de ser voltada para baixo e se torna voltada para cima. Tal ponto não é um máximo nem um mínimo local, ele é conhecido como **ponto de inflexão** e pode ser observado, por exemplo, na origem no gráfico da função $f(x) = x^3$, representado na Figura 5.5. Note que a função $f(x) = x^3$, em $x < 0$, possui concavidade para baixo, enquanto, para $x > 0$, sua concavidade é para cima. Computando a derivada, teríamos

$$f'(x) = 3x^2 \implies f''(x) = 6x,$$

donde vemos que $f''(x)$ de fato se anula em $x = 0$, como era esperado.

Considere, agora, a função $f(x) = x^4$. Sua derivada é $f'(x) = 4x^3$ e sua derivada segunda é $f''(x) = 12x^2$. Perceba que $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, a função $f(x)$ em questão possui gráfico com concavidade para cima em todo o domínio. Contudo, vemos que $x = 0$ é solução de $f''(x) = 0$, o que poderia nos levar a acreditar que em $x = 0$ temos um ponto de inflexão. Isso claramente não é verdade, uma vez que a concavidade do gráfico não muda ali — nem em ponto algum.

$x = c \text{ é ponto de inflexão} \implies f''(c) = 0.$

Portanto, note que se temos um ponto de inflexão, a derivada segunda deve se anular ali. Entretanto, a derivada segunda se anular não implica ter-se um ponto de inflexão, isto é, a volta da implicação acima não é necessariamente verdadeira. Portanto, para se assegurar que tem-se um ponto de inflexão, é preciso notar não apenas que a derivada segunda se anula ali, mas sim que ela **muda de sinal naquele ponto**.

Exemplo 5.9

Encontre os intervalos em que o gráfico da função $f(x) = \sin(x)$ possui concavidade para cima.

Computando as derivadas, temos $f'(x) = \cos(x)$ e $f''(x) = -\sin(x)$.

Avaliemos no intervalo $[0, 2\pi]$, posto que este é um período da função seno e o gráfico apenas se repete daí em diante. Notamos que

- (i) No intervalo $(0, \pi)$, temos $\sin(x) > 0$, de modo que $f''(x) < 0$.
- (ii) No intervalo $(\pi, 2\pi)$, temos $\sin(x) < 0$, de modo que $f''(x) > 0$.

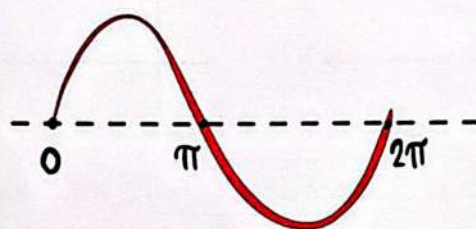


Figura 5.14: Concavidade da função seno em um período.

Ou seja, como mostra a Figura 5.14, temos uma concavidade para baixo no intervalo $[0, \pi]$ e uma concavidade para cima no intervalo $[\pi, 2\pi]$, como já era de nosso conhecimento.

5.3.3 Esboçando gráficos

Com tudo que já estudamos até aqui, estamos munidos de poderosas ferramentas que nos possibilitam construir o gráfico de qualquer função $f(x)$ a partir, unicamente, da sua expressão analítica. Para tal, dada a expressão de uma função $f(x)$, seguiremos os seguintes passos para levantar informações a respeito de seu gráfico:

(1) Domínio da função.

Começaremos estudando a expressão analítica da função, avaliando quais são os valores possíveis que x pode assumir. Isso pode, eventualmente, restringir a região do nosso gráfico.

(2) Intersecções com os eixos.

Procuraremos calcular $f(0)$ e, também, as soluções de $f(x) = 0$, que fornecerão os interceptos do gráfico da função com o eixo vertical e horizontal, respectivamente.

(3) Simetrias e paridade.

Aqui vale verificar se a função é par, isto é, se $f(-x) = f(x)$, ou se a função é ímpar, ou seja, $f(-x) = -f(x)$. Isso poupará certo trabalho, posto que funções pares possuem o gráfico simétrico em relação ao eixo y e funções ímpares têm seus gráficos simétricos em relação à origem, como mostra a Figura 5.15. Sendo nossa função alguma dos dois casos, precisaremos apenas estudar o comportamento de seu gráfico para $x > 0$, pois a simetria nos possibilitará refletir o gráfico e obtê-lo por completo em todo o domínio.

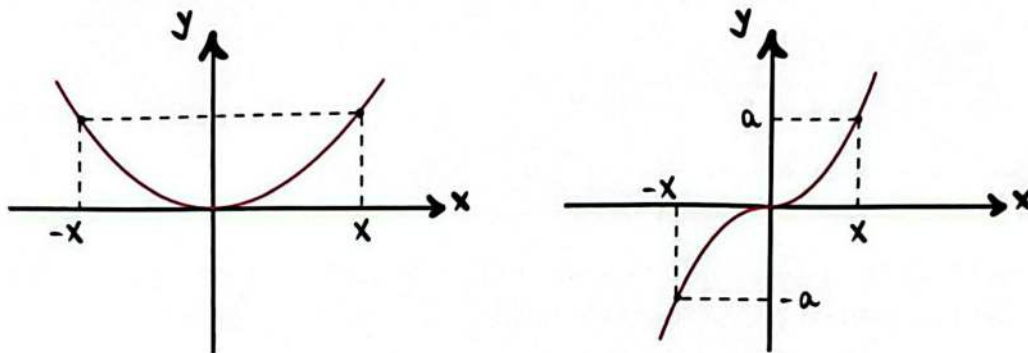


Figura 5.15: Função par e ímpar.

(4) Crescimento e decrescimento (sinal da primeira derivada).

Aqui iremos estudar o sinal da primeira derivada $f'(x)$, que nos possibilitará encontrar os intervalos em que a função é crescente — quando $f'(x) > 0$ — e quando ela é decrescente — quando $f'(x) < 0$.

(5) Concavidade (sinal da segunda derivada).

Nesse ponto, conseguiremos entender, sendo a função crescente em um certo intervalo, se o seu gráfico é crescente com a concavidade para cima ou para baixo. Para intervalos em que a função é decrescente, o procedimento será o mesmo. Isso será determinado, como vimos, pelo sinal de $f''(x)$. Se tivermos $f''(x) > 0$ em um certo intervalo, então a concavidade do gráfico é para cima; já se tivermos $f''(x) < 0$ em um certo intervalo, então a concavidade do gráfico é para baixo.

(6) Pontos notáveis.

Aqui buscaremos outros pontos notáveis além daqueles do item (2). Neste caso, tentaremos encontrar as raízes da derivada primeira e da derivada segunda de $f(x)$, buscando máximos e mínimos locais, bem como pontos de inflexão. Esses pontos nos darão uma excelente intuição a respeito do “esqueleto” do gráfico de $f(x)$.

(7) Assíntotas.

Por fim, investigaremos o comportamento da função em limites extremos, buscando encontrar:

- (i) Assíntotas horizontais
São as retas $y = a$ tais que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a.$$

- (ii) Assíntotas verticais
São as retas $x = a$ tais que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty.$$

- (iii) Assíntotas oblíquas
São as retas $y = ax + b$ tais que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Fazendo o estudo detalhado de cada um destes sete tópicos, estaremos munidos de tudo que precisamos para esboçar o gráfico de qualquer função $f(x)$.

Façamos o esboço, a título de exercício, do gráfico da função $f(x) = x^2 e^{-x}$.

(1) Domínio da função

Esse caso é bem imediato: não temos restrições, de modo que o domínio de f são os reais. Veja que $f(x)$ nunca assume valores negativos, para qualquer x , de modo que seu gráfico estará integralmente acima do eixo x . Isto é, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

(2) Intersecções com os eixos

Primeiramente, fazendo $x = 0$, vemos que $f(0) = 0$, ou seja, o gráfico passa pela origem. Já as raízes da função serão as soluções de $f(x) = 0$, ou seja

$$\frac{x^2}{e^x} = 0,$$

cujas únicas soluções são $x = 0$.

(3) Simetrias e paridade

Vemos que $f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)} = x^2 e^x$. Logo, como $f(-x) \neq f(x)$, a função não é par. Vemos, também, que $f(-x) \neq -f(x) = -x^2 e^{-x}$. Logo, ela não é ímpar. Sendo assim, não conseguiremos poupar nossos esforços: o gráfico da função não possui simetrias em relação ao eixo vertical ou à origem; teremos que estudar o comportamento da função em todo seu domínio.

(4) Crescimento e decrescimento (sinal da primeira derivada)

Tomando a derivada de f , temos

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x).$$

Podemos antecipar o estudo do tópico (6) notando que a primeira derivada se anula em dois pontos, isto é, $x = 0$ e $x = 2$. Logo, teremos aqui dois valores críticos.

Quanto ao sinal de $f'(x)$, vemos que o termo e^{-x} é sempre positivo, de modo que o sinal fica integralmente determinado pelo sinal do produto $x(2 - x)$. Tal análise é imediata, e nos mostra que

- (i) $f'(x) > 0$ para $0 < x < 2$.
- (ii) $f'(x) < 0$ para $x < 0$ ou $x > 2$.

Disso concluímos, inclusive, que temos um mínimo local em $x = 0$, uma vez que para $x < 0$ a função é decrescente e para $x > 0$ ela é crescente. Ou seja, a derivada troca de sinal em $x = 0$, deixando de ser negativa e passando a ser positiva, o que ocorre apenas em um vale (mínimo local).

De modo semelhante, concluímos que $x = 2$ é um máximo local, uma vez que neste ponto a derivada deixa de ser positiva e se torna negativa, o que só ocorre em um morro (máximo local).

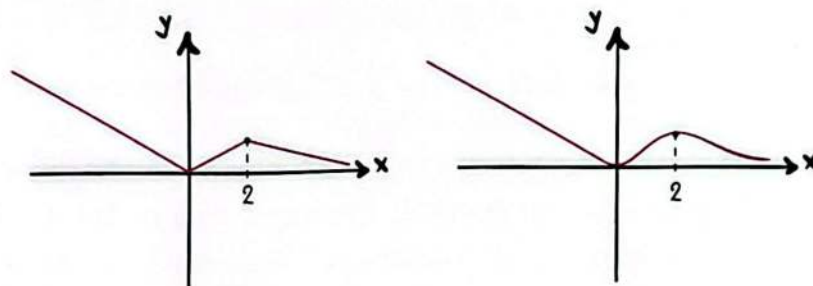


Figura 5.16: Esqueleto do gráfico de $f(x)$.

Com o que temos aqui já é possível ter uma ideia do esqueleto do gráfico de $f(x)$, como mostra a Figura 5.16: temos uma única raiz, em $x = 0$, onde tem-se $f(0) = 0$, de modo que o ponto $(0, 0)$ pertence ao gráfico de f e é, também, um mínimo local (na verdade, como $f(x) \geq 0$, tal ponto será um mínimo global). À esquerda deste ponto, a função é sempre decrescente, sendo crescente em $(0, 2)$, com um máximo local em $x = 2$, e sendo decrescente daí em diante. A figura da esquerda mostra um esboço bem grosseiro do gráfico, apenas tentando evidenciar o comportamento tanto crescente quanto decrescente e destacando dois dos pontos notáveis: o máximo e mínimo local. Sabemos, naturalmente, que por serem pontos de derivada zero, a função é suave e não possui quinas, tendo o seu comportamento possivelmente mais parecido com o da figura da direita. A essa altura, contudo, ainda não estamos preocupados com isso, posto que o formato exato da curva será determinado pela derivada segunda, no próximo tópico. Queremos apenas deixar claro como o formato do gráfico já começa a se desenhar com o que estudamos até este ponto.

(5) Concavidade (sinal da segunda derivada)

A derivada segunda de f é dada por

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2).$$

Novamente, sendo $e^{-x} > 0$, o sinal de $f''(x)$ será o mesmo da função quadrática

$$g(x) = x^2 - 4x + 2.$$

As raízes de $g(x)$ são $x_1 = (2 - \sqrt{2})$ e $x_2 = (2 + \sqrt{2})$, e, como $g(x)$ troca de sinal ao passarmos por uma raiz (esboce a parábola que descreve tal função e você verá com facilidade), $f''(x)$ também o faz, de modo que em x_1 e x_2 teremos pontos de inflexão: tais valores são raízes de $f''(x) = 0$ além de serem pontos em que a derivada segunda troca de sinal. Portanto, a concavidade de $f(x)$ inverte em tais pontos.

Em suma, teremos

(i) $f''(x) > 0$ para $x > (2 + \sqrt{2})$ ou $x < (2 - \sqrt{2})$.

Ou seja, a concavidade da função é sempre para cima nestes intervalos.

(ii) $f''(x) < 0$ para $(2 - \sqrt{2}) < x < (2 + \sqrt{2})$.

Ou seja, a concavidade da função é sempre para baixo neste intervalo.

(6) Pontos notáveis

Vamos recapitular os principais pontos que já levantamos até aqui:

(i) $x = 0$.

É a única raiz da função, é o ponto de intercepto com o eixo y e é um mínimo local.

(ii) $x = 2$.

Fornece o valor $f(2)$ que é um máximo local.

(iii) $x = (2 - \sqrt{2})$ e $x = (2 + \sqrt{2})$.

Fornecem os pontos de inflexão e determinam a concavidade de f , sendo ela:

- Concavidade para cima: sempre que $x > (2 + \sqrt{2})$ ou $x < (2 - \sqrt{2})$.
- Concavidade para baixo: sempre que $(2 - \sqrt{2}) < x < (2 + \sqrt{2})$.

Note como esses pontos nos permitem fazer um esboço mais preciso e suave do gráfico de $f(x)$, como mostra a Figura 5.17. Os dois pontos de inflexão em $x_1 = (2 - \sqrt{2})$ e $x_2 = (2 + \sqrt{2})$ são equidistantes do máximo local em $x = 2$ e determinam a mudança de concavidade.

(7) Assíntotas

Por fim, procuremos as assíntotas de $f(x)$.

(i) Assíntotas Horizontais

Procuramos os valores de $y = a$ tais que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 e^{-x} = a.$$

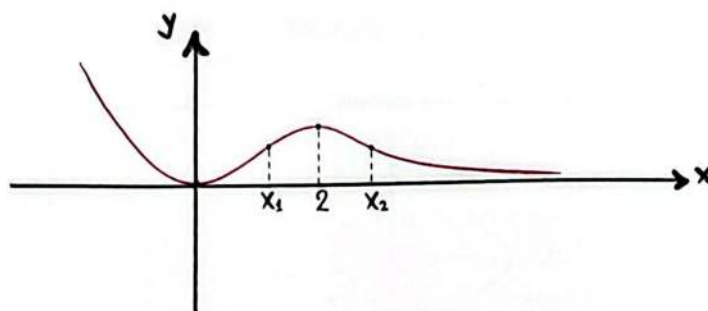


Figura 5.18: Gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Exemplo 5.10

Esboce o gráfico da função $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Sigamos o protocolo estabelecido.

(1) Domínio da função.

Como o argumento $(x^2 + 1)$ do logaritmo é sempre maior que zero, vemos que x pode assumir qualquer valor real. Logo, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(2) Intersecções com os eixos.

Procurando por raízes, buscamos as soluções para a equação $\ln(x^2 + 1) = 0$, que possui uma única solução, sendo $x = 0$. Logo, o gráfico intercepta o eixo x e o eixo y no mesmo ponto, em $(0, 0)$.

(3) Simetrias e paridade.

Computando $f(-x)$, vemos que

$$f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) = f(x) \implies f \text{ é função par.}$$

Desse modo, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo vertical, de modo que vamos nos preocupar em estudar a função apenas para $x > 0$.

(4) Crescimento e decrescimento (sinal da primeira derivada).

A primeira derivada de f é

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \ln(x^2 + 1) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Sendo seu denominador sempre positivo, o sinal de $f'(x)$ dependerá exclusivamente de seu numerador, de onde conclui-se, de imediato, que $f'(x) > 0$ para $x > 0$. Lembre-se que não é preciso avaliarmos o que ocorre para $x < 0$ devido à simetria da função.

Além disso, vemos que a derivada se anula em $x = 0$ e, como ela também muda de sinal neste ponto, passando de negativa para positiva, sabemos que teremos ali um mínimo local.

(5) Concavidade (sinal da segunda derivada).

A derivada segunda de f é

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Novamente, seu sinal dependerá apenas do numerador, uma vez que o denominador é sempre positivo. Vemos que $f''(x) < 0$ para $x > 1$ ou $x < -1$ e que $f''(x) > 0$ para $-1 < x < 1$. A derivada segunda se anula em $x = 1$ e $x = -1$ e, como ela muda de sinal nesses dois pontos, sabemos que se tratam de dois pontos de inflexão.

Como precisamos nos preocupar apenas com o gráfico para $x > 0$, o que importa até aqui é:

- (i) Na origem temos um ponto de inflexão.
- (ii) A concavidade da função é para cima para $0 < x < 1$
- (iii) A concavidade da função é para baixo para $x > 1$.

(6) Pontos notáveis.

Recapitulando, os pontos importantes são:

- (i) A origem, uma vez que ela pertence ao gráfico e é um mínimo local (na verdade, mínimo absoluto, neste caso, como o leitor pode verificar).
- (ii) O ponto $(1, \ln(2))$, que é ponto de inflexão. O seu simétrico, isto é, $(-1, \ln(2))$, também o será, dada a paridade de f , mas não estamos nos preocupando com essa região do gráfico no momento.

(7) Assíntotas.

Procurando por assíntotas (apenas para $x > 0$, pela simetria), encontramos que:

- (i) Se $x \rightarrow \pm\infty$, vemos que $f(x) \rightarrow \infty$, de modo que não há assíntotas horizontais.
- (ii) Não há nenhum valor de x , finito, que faça a expressão de $f(x)$ ir ao infinito, de modo que não temos assíntotas verticais. Via de regra essas assíntotas surgem quando x se aproxima de algum valor que não está no domínio da função e, próximo de tal valor, $f(x)$ tende ao infinito. Sendo o domínio de f os reais, é natural que não se tenha assíntotas desse tipo.

- (iii) O leitor pode verificar, também, que a função não possui assíntotas oblíquas.

Sendo assim, temos todas as informações para construir o gráfico de $f(x)$.

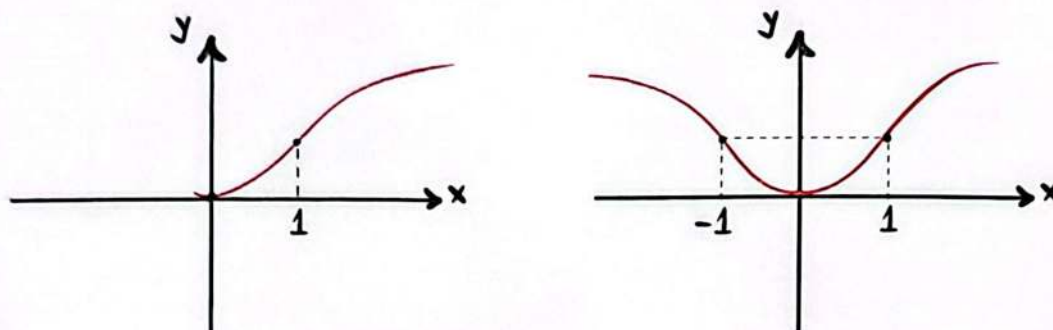


Figura 5.19: Gráfico da função $f(x)$.

A Figura 5.19 mostra o gráfico de $f(x)$, sendo a figura da esquerda o gráfico apenas para $x \geq 0$, e a da direita o gráfico completo, obtido pela reflexão em torno do eixo vertical, dada a paridade da função.

5.4 Aproximações e Séries de Taylor

Seja uma função $f(x)$ suave (ou seja, derivável quantas vezes quisermos). Considere o problema de construir um polinômio $p_n(x)$ que se comporte como $f(x)$ perto de $x = a$.

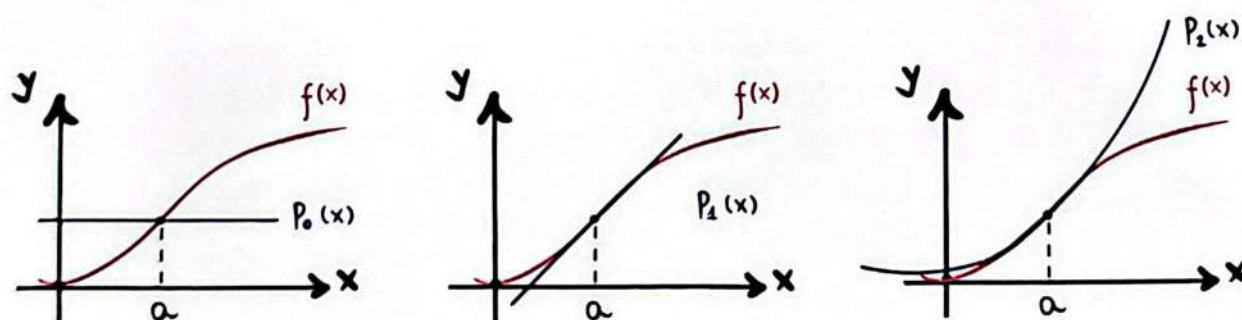


Figura 5.20: Aproximações de $f(x)$.

A primeira aproximação poderia ser simplesmente a função constante $p_0(x) = f(a)$. Vemos que isso, apesar de garantir que $p_0(x) = f(x)$ em $x = a$, não se mostra uma boa aproximação para pontos no entorno de a , como evidencia a primeira imagem da Figura 5.20. Uma melhor aproximação seria uma função $p_1(x)$ tal que, além de ter o mesmo valor que f em $x = a$, possuía, também, a mesma inclinação, ou seja, garantimos que, em $x = a$:

(i) As funções possuem o mesmo valor: $p_1(a) = f(a)$.

(ii) As funções possuem a mesma reta tangente: $p_1'(a) = f'(a)$.

Isso, como mostra a imagem do meio da Figura 5.20, já constitui uma aproximação bem melhor para a função f em torno de $x = a$. Tal polinômio, $p_1(x)$, é a reta que faz a aproximação linear discutida na última seção do Capítulo 4.

Além da nossa função $p_1(x)$ que tenta aproximar f em torno de a ter o mesmo valor e a mesma derivada em $x = a$ do que f , poderíamos tentar ser ainda mais precisos e dizer que elas terão a mesma curvatura neste ponto, ou seja, o mesmo comportamento de concavidade. Chamemos essa aproximação de $p_2(x)$. Portanto, se a função f tiver um ponto de inflexão em $x = a$, a nossa função $p_2(x)$ também o terá. Assim, garantimos que, em $x = a$,

(i) As funções possuem o mesmo valor: $p_2(a) = f(a)$.

(ii) As funções possuem a mesma reta tangente: $p_2'(a) = f'(a)$.

(iii) As funções possuem a mesma curvatura: $p_2''(a) = f''(a)$.

A função $p_2(x)$ está representada na última imagem da Figura 5.20 e de fato se mostra uma aproximação ainda mais precisa para f em torno de a .

A essa altura o leitor percebeu que começamos com uma função constante, $p_0(x)$, depois evoluímos para uma função afim $p_1(x)$ e, por fim, para uma função quadrática $p_2(x)$. A cada grau que adicionávamos no polinômio $p_n(x)$, melhor ficava a nossa aproximação, uma vez que exigíamos que o polinômio “toque” a função não só no valor, mas também na inclinação, curvatura e comportamento mais geral ao redor de a . Podemos, portanto, adicionar ainda mais termos, exigindo que $p_n'''(a) = f'''(a)$ e que todas as derivadas superiores também sejam iguais. Nesse caso, teríamos o polinômio

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

O polinômio $p_n(x)$ expresso pela equação acima é chamado **polinômio de Taylor** de ordem n para a função f em torno de a . Quando $n \rightarrow \infty$, temos um polinômio com infinitos termos, e, quando tal série converge para a função f , dizemos que foi feita uma **expansão da função f em série de Taylor em torno de a** . As três curvas da Figura 5.20 representam os polinômios de Taylor de f de ordem 0, 1 e 2, respectivamente.

Note que o fator $(x-a)^k$ que aparece em cada termo é necessário para que eles se anulem em a e tenhamos $p_n(a) = f(a)$. Veja que o grau desse fator cresce-se de uma unidade a cada termo adicionado, o que é necessário para que os termos superiores

continuem se anulando e tenhamos, por exemplo, $p'_n(a) = f'(a)$. Derivando uma vez $p_n(x)$, tem-se

$$p'_n(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1},$$

e todos os termos com dependência em x se anulam em $x = a$, fazendo com que $p'_n(a) = f'(a)$, como gostaríamos. A essa altura fica claro, também, o motivo de adicionarmos os termos do tipo $k!$ nos denominadores de cada fator adicionado: eles “matam” o expoente que cai multiplicando o termo ao derivar o fator $(x-a)^k$. Tomando a segunda derivada de $p_n(x)$ tem-se

$$p''_n(x) = f''(a) + f'''(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2},$$

de modo que em $x = a$ todos os termos se anulam, exceto o da derivada segunda, fazendo com que $p''_n(a) = f''(a)$.

Note que isso se propaga *ad infinitum*, uma vez que ao tomar a n -ésima derivada de $p_n(x)$, o termo

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se tornará simplesmente

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = f^{(n)}(a),$$

fazendo com que o polinômio de Taylor e a função f possuam, em $x = a$, a mesma derivada n -ésima.

Caso a aproximação seja feita em torno da origem, isto é, de $x = a = 0$, chamamo-la de Polinômio de Maclaurin de f , um caso especial do Polinômio de Taylor:

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (5.5)$$

Novamente, quando $n \rightarrow \infty$, ficamos com um polinômio de infinitos termos, e, quando essa série converge para a função f , dizemos que foi feita uma expansão de Maclaurin da função f .

O polinômio de Taylor é a melhor aproximação local possível de uma função diferenciável. Ele é como uma lupa: quanto mais termos (mais derivadas usamos), mais a lupa revela os detalhes finos da função em torno do ponto. A Figura 5.21 mostra alguns polinômios de Taylor da função $f(x) = \sin(x)$ em torno de $x = 0$. Os gráficos representam, de cima para baixo, os polinômios de ordem 3, 5, 7, 9 e 11, respectivamente. Note que, quanto mais termos são adicionados, melhor o polinômio $p_n(x)$ se aproxima de f .

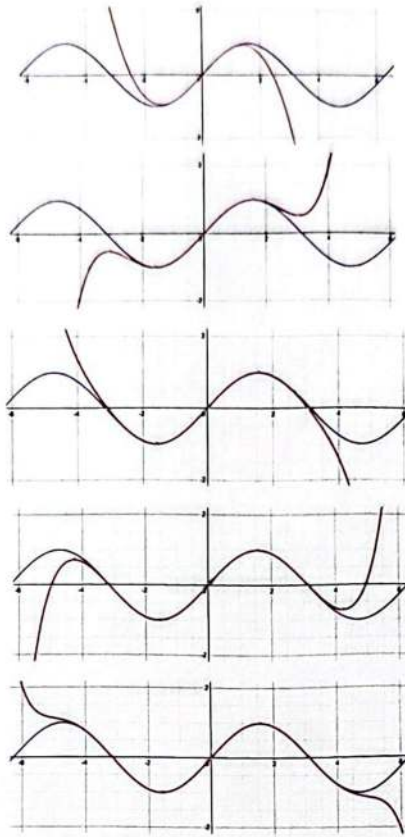


Figura 5.21: Polinômios de Maclaurin para $f(x) = \sin(x)$.

5.4.1 Séries clássicas

Existem algumas funções que são centrais na Matemática e cujas séries merecem ser destacadas. Avaliaremos os polinômios de grau $n \rightarrow \infty$, ou seja, as séries de Taylor de tais funções. Mais explicitamente, faremos a expansão de tais séries em torno da origem, isto é, escreveremos suas séries de Maclaurin. O fato de que tais séries (de infinitos termos) convergem para a função f precisaria ser demonstrado, mas foge do escopo deste livro. Para as funções abaixo, o leitor deve assumir tal convergência.

Função Exponencial

Essa é certamente a função mais simples de todas para se expandir em série de Taylor, uma vez que as derivadas de qualquer ordem de $f(x) = e^x$ são todas iguais entre si e valem e^x . O valor das derivadas avaliado em $x = 0$ é $e^0 = 1$, de modo que a Equação (5.5) se torna

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (5.6)$$

A Equação (5.6) fornece a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$. Para um grau n finito, teríamos um polinômio de Maclaurin que aproxima a função f (em

torno da origem, no caso). Contudo, na expressão acima, demos um passo além e afirmamos que a função f se torna exatamente igual à sua aproximação do polinômio de Maclaurin no limite em que $n \rightarrow \infty$.

É justamente esse fato — de que a função se torna exatamente igual à sua aproximação quando o grau do polinômio tende a infinito — que precisaria ser provado. Como adiantamos, tal demonstração foge do escopo do que estudamos aqui. Porém, é importante que o leitor note que nem sempre essa igualdade ocorre, apesar de que irá ocorrer nos casos que aqui faremos, para as funções exponencial, seno e cosseno. Para a função seno, note que a própria Figura 5.21 parece evidenciar o que desconfiamos: quanto mais termos adicionamos, melhor o polinômio de Taylor se aproxima de f , de modo que, para infinitos termos, ele deve se tornar a própria função f .

Função Logarítmica

Como $\ln(x)$ não está definido em $x = 0$, façamos a expansão em série de Taylor da função $f(x) = \ln(x + 1)$, em torno de $x = 0$. Os primeiros valores nesse ponto são:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x + 1) & \Rightarrow & f(0) = 0. \\ f'(x) &= \frac{1}{x + 1} & \Rightarrow & f'(0) = 1. \\ f''(x) &= -\frac{1}{(x + 1)^2} & \Rightarrow & f''(0) = -1. \\ f'''(x) &= \frac{2}{(x + 1)^3} & \Rightarrow & f'''(0) = 2. \end{aligned}$$

De modo geral, teremos

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n - 1)!,$$

de modo que a série centrada em $x = 0$ é

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n. \quad (5.7)$$

É possível mostrar que a equação acima é válida para $-1 \leq x \leq 1$, isto é, a série converge neste intervalo.

Note que, para $x \ll 1$, podemos usar a aproximação em primeira ordem, desprezando os demais termos da série e dizer que $\ln(x + 1) \approx x$.

Funções Trigonômicas

As funções seno e cosseno são razoavelmente simples de serem expandidas em séries de Taylor, visto que suas derivadas se alternam entre seno e cosseno. Para a função $f(x) = \sin(x)$ temos $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$ e as derivadas superiores tornam a se alternar entre esses quatro valores.

Expandindo em torno de $x = 0$, os termos de seno irão sempre se anular, de modo que teremos apenas os termos cuja derivada é $\cos(x)$, cujo valor será a unidade em $x = 0$. Sendo assim, pela Equação (5.5), vemos que todos os termos de ordem par serão nulos, e os termos de ordem ímpar irão alternar seus sinais, de modo que a série de Taylor da função seno em torno da origem é

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \quad (5.8)$$

A Equação (5.8) deixa claro a clássica aproximação para ângulos pequenos que costumamos fazer para o seno, em que $\sin(x) \approx x$. O que estamos fazendo de fato é pegar o primeiro termo da série de Taylor da função seno, que é a primeira aproximação para tal função e pode ser suficientemente boa desde que $x \ll 1$, de modo que os termos de ordem superior sejam muito desprezíveis.

De modo análogo, podemos escrever a série de Taylor para a função $f(x) = \cos(x)$ em torno de $x = 0$. Neste caso, são os termos de ordem ímpar que se anulam, de modo que a série é

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}. \quad (5.9)$$

A Equação (5.9) também mostra a aproximação que já usamos para o cosseno, para ângulos pequenos, e que se escreve ($\cos(x) \approx 1 - x^2/2$). Tal aproximação pega o primeiro termo dependente de x na série de Taylor do cosseno, desprezando os demais, que de fato vão a zero muito rapidamente quando $x \ll 1$.

Um exercício simples mas interessante que ajuda a mostrar como tudo se encaixa é derivar a Equação (5.8) para obter diretamente a série de Taylor para o cosseno, expressa na Equação (5.9).

Exemplo 5.11

Obtenha uma aproximação para o valor de $e^{0,1}$.

Expandindo a função $f(x) = e^x$ em série de Taylor em torno de $x = 0$, temos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Vemos que, quanto mais próximo de zero está x , mais desprezíveis vão se tornando os termos de maior potência da série. Pegando os três primeiros termos, teríamos

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,1^2}{2!} = 1,10500.$$

Já para os quatro primeiros termos, teríamos

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,1^2}{2!} + \frac{0,1^3}{3!} = 1,10517.$$

Quanto mais termos pegarmos, melhor será a aproximação. Porém, vemos que até a terceira casa decimal os termos de ordem superior a 2 na série de Taylor são irrelevantes na aproximação. A título de comparação, o valor exato, até a quarta casa decimal, é $e^{0,1} = 1,1051$.

Exemplo 5.12

Demonstre a identidade de Euler, isto é, que $e^{i\pi} + 1 = 0$, em que $i^2 = -1$.

Esse é um exercício que nos permite compreender, de uma forma muito simples, uma das mais belas equações da Matemática.

Primeiro, pela Equação (5.6) e usando a ciclicidade das potências de i , obtemos:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + i\frac{x^9}{9!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots\right) \\ &= \cos(x) + i\sin(x), \end{aligned}$$

em que agrupamos os termos com potências de i na segunda linha e, pelas Equações (5.8) e (5.9), notamos que os termos entre parênteses eram as séries de Maclaurin para o seno e o cosseno.

Avaliando tal expressão em $x = \pi$, chegamos à famosa identidade de Euler^a:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

^aÉ claro que existem alguns detalhes técnicos que precisariam ser melhor pontuados para garantir a validade do que aqui foi feito, o primeiro deles sendo o fato de que, a princípio, a série de Taylor da função exponencial na Equação (5.6) foi construída inicialmente apenas para o domínio real, isto é, $x \in \mathbb{R}$. Que ela pode ser utilizada para $x \in \mathbb{C}$ é uma extensão que precisaria ser construída, além do próprio fato de que série em si, tomando-se os infinitos termos, converge exatamente para e^x . Para além desses detalhes técnicos e, também, de alguns outros — que são sim relevantes, mas fogem do escopo deste texto —, a demonstração acima é bastante sucinta e mostra como o infinito nos revela verdades profundas e belas da Matemática.

5.5 Regra de L'Hôpital

Em muitos problemas envolvendo limites, encontramos expressões que resultam em *formas indeterminadas*, como $0/0$ ou ∞/∞ . Essas formas indicam que, embora o

numerador e o denominador estejam ambos tendendo ao mesmo valor “problemático”, não está claro o que acontece com a razão entre eles — ela pode tender a qualquer número real, ao infinito ou até mesmo não convergir. Já vimos algumas formas de lidar com esse tipo de indeterminação no Capítulo 3, contudo, o leitor deve se lembrar que eram bastante limitadas e restritas as manipulações que conseguíamos fazer nesses casos. Muitas vezes, para computar um limite como este, evocamos resultados desconhecidos sobre taxas de crescimento relativas entre certos tipos de funções.

Para lidar com essas situações de forma rigorosa e sistemática, temos uma ferramenta poderosa: a **Regra de L'Hôpital**. Com ela conseguiremos, inclusive, provar alguns resultados que evocamos ao estudar limites com esse tipo de indeterminação.

Formalmente, suponha que $f(x)$ e $g(x)$ sejam funções deriváveis em uma vizinhança de um ponto a , exceto possivelmente no próprio ponto. Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

ou ambas tenderem ao infinito, e se a função g e sua derivada não se anularem próximo de a , então, sob as condições apropriadas, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

desde que o limite do lado direito exista (ou seja infinito). Essa regra também aplica-se quando $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ ou mesmo em limites laterais.

Mas por que isso funciona?

O cerne dessa regra está em perceber que a derivada mede a *taxa de variação local* de uma função. Quando duas funções se aproximam de zero ao mesmo tempo ou crescem sem limite, a razão entre elas depende de quão rápido cada uma faz isso — ou seja, da inclinação de suas curvas naquele instante. Se uma função tende a zero, mas com inclinação muito mais suave do que a outra, a razão entre elas pode divergir. A Regra de L'Hôpital formaliza essa comparação: ela não se interessa pelo valor das funções, mas pela *relação entre seus ritmos de variação*.

De modo mais concreto, imagine duas curvas que passam pela origem: uma reta e uma parábola. Ambas valem zero em $x = 0$, mas a parábola desce mais suavemente, enquanto a reta desce com inclinação constante. A razão entre essas curvas perto da origem depende justamente dessa diferença de inclinação. A Regra de L'Hôpital permite capturar esse fenômeno sem precisar inventar aproximações — ela afirma que, ao lidar com indeterminações do tipo $0/0$ ou ∞/∞ , podemos olhar para as derivadas como se fossem “aproximações lineares” das funções e tomar o limite da razão entre essas aproximações.

De modo mais rigoroso, essa ideia está conectada à noção de que, se uma função é suficientemente suave, ela se comporta localmente como sua tangente — ou seja, como sua derivada. Assim, a regra de L'Hôpital pode ser vista como uma aplicação do conceito de **linearização local**: quando não sabemos qual função domina diretamente, comparamos suas versões lineares. Vale lembrar que a Regra de L'Hôpital não é uma ferramenta universal para limites. Ela só pode ser aplicada quando

a substituição direta resulta em indeterminações do tipo $0/0$ ou ∞/∞ . Para outras formas, como $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ ou ∞^0 , é necessário primeiro reescrever a expressão de maneira adequada, transformando-a em uma indeterminação dos tipos que se enquadram na Regra de L'Hôpital.

A Regra de L'Hôpital é, portanto, mais do que uma técnica de cálculo: é uma forma de pensar o comportamento de funções em situações-limite. Ao observar a maneira como elas variam — em vez de apenas seus valores —, ganhamos acesso a uma camada mais profunda de análise: entender o todo a partir da variação local.

Exemplo 5.13

Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Esse é o clássico limite trigonométrico já explorado algumas vezes por nós. Veja que, quando $x \rightarrow 0$, a expressão tende à indeterminação $0/0$, de modo que podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

Note que, ao tomar as derivadas, a indeterminação desaparece e o limite se torna trivial, concordando com o valor que conhecíamos para tal.

Exemplo 5.14

Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}.$$

Quando $x \rightarrow \infty$, a expressão tende à indeterminação ∞/∞ , de modo que é possível aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}.$$

Note que o limite das derivadas continua nos levando à indeterminação ∞/∞ . Sendo assim, apliquemos novamente a regra:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Tal limite, portanto, é zero. Já enunciamos anteriormente o fato de que a função e^x cresce mais rapidamente do que qualquer potência de x . Note que, no limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x},$$

que inicialmente fornece a indeterminação ∞/∞ , podemos aplicar a regra de L'Hôpital n vezes seguidas, de modo que a n -ésima derivada de x^n fornecerá uma constante, a dizer, $n!$, enquanto a n -ésima derivada da função exponencial será ela própria, de modo que resultaríamos em

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \xrightarrow{\text{derivando } n \text{ vezes}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{constante}}{e^x} = 0,$$

o que prova o resultado de que a exponencial cresce mais rapidamente que qualquer potência x^n .

Embora a Regra de L'Hôpital seja uma ferramenta extremamente útil para calcular limites envolvendo certos tipos de indeterminações, ela não resolverá todos os problemas. Duas limitações principais merecem atenção: a primeira é que **a existência do limite da razão entre as derivadas não garante, por si só, a existência do limite original**; a segunda é que **a aplicação da regra pode não simplificar o problema — talvez complicando-o mais que o necessário**.

A razão pela qual o limite das derivadas pode existir enquanto o limite original não existe é sutil: a derivada é uma descrição *local* do comportamento da função, enquanto o limite que estamos tentando calcular pode depender de comportamentos *globais*, como oscilações ou descontinuidades. A Regra de L'Hôpital opera sob a suposição de que as funções são bem comportadas o bastante para que essa aproximação local reflita a tendência real da razão. Quando essa hipótese falha, a conclusão também pode falhar.

Considere, por exemplo, a função:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad g(x) = x, \quad \text{com } x \rightarrow 0.$$

Queremos estudar o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1/x)}{x}.$$

Embora o numerador seja limitado (oscilando entre -1 e 1) e o denominador tenda a zero, essa razão não possui limite, pois o valor oscila indefinidamente entre $\pm\infty$ dependendo de como $\sin(1/x)$ varia. Nesse caso, **a forma parece sugerir $0/0$** , mas a aplicação da Regra de L'Hôpital aqui **não é válida**, pois $\sin(1/x)$ **nem sequer é diferenciável em $x = 0$** , e seu comportamento próximo de zero não é controlado. O problema está na oscilação, que não pode ser captada apenas pelas derivadas. Assim, mesmo que se pudesse calcular formalmente $f'(x)/g'(x)$, o resultado não garantiria a existência do limite original.

Demonstração

Vamos aqui demonstrar a regra de L'Hôpital para o caso da indeterminação $0/0$. Suponha que as funções f e g sejam suficientemente suaves (infinitamente deriváveis)

em um entorno de a , e que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}.$$

Vamos expandir $f(x)$ e $g(x)$ em séries de Taylor centradas em a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots,$$

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots.$$

Como $f(a) = g(a) = 0$, temos:

$$f(x) = f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots,$$

$$g(x) = g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots.$$

Logo, o quociente se torna:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots}{g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots}.$$

Fatorando $(x-a)$ e simplificando, ficamos com

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a) + \dots}{g'(a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a) + \dots}.$$

Tomando o limite quando $x \rightarrow a$, os termos de ordem superior desaparecem, e obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Esse resultado revela que a validade da Regra de L'Hôpital repousa no princípio fundamental do cálculo: a substituição do comportamento global das funções por seu comportamento local — capturado pelas derivadas — nas proximidades do ponto de interesse.

5.6 Problemas

Seção 5.1 – Taxas Relacionadas

Problema 5.1 (*Expansão do círculo*). O raio de um círculo aumenta a 2 cm/s. Qual é a taxa instantânea de aumento da área do círculo quando o seu raio é de 5 cm?

Problema 5.2 (*Triângulo que cresce*). Um triângulo retângulo mantém dois de seus lados sempre perpendiculares. Um lado tem comprimento fixo de 5 cm e o outro cresce a 10 cm/s, com a hipotenusa se ajustando para que o triângulo feche. A que taxa a área do triângulo está aumentando quando o cateto variável medir 16 cm?

Problema 5.3 (*Posição relativa do balão*). Um balão de gás Hélio está subindo verticalmente com uma velocidade constante de 4 m/s enquanto um observador, distando 20 m do ponto de lançamento do balão no solo, o observa. Quando o balão está a 30 m de altura, qual é a rapidez instantânea com que a distância entre o observador e o balão aumenta?

Problema 5.4 (*Preenchimento do copo cônico*). Um cone com 20 cm de altura e 10 cm de raio está sendo preenchido com água a uma taxa de 5 cm³/s. Qual é a velocidade com que o nível vertical da água sobe quando a sua altura é de 8 cm?

Problema 5.5 (*Cruzamento oblíquo na estrada*). Dois carros A e B se movem em duas estradas que se cruzam em um ângulo θ . Um carro se aproxima do cruzamento a uma velocidade v_A , enquanto o outro se afasta a uma velocidade v_B . Quando A estiver a uma distância a do cruzamento e B estiver distando b deste, com que velocidade a distância entre A e B estará aumentando?

Seção 5.2 – O Teorema do Valor Médio

Problema 5.6 (*Retângulo inscrito na parábola*). Considere um retângulo que está acima do eixo x e cuja base está contida nele. Qual é a maior área de tal retângulo sabendo que ele pode ser inscrito na parábola dada por $f(x) = 4 - x^2$?

Problema 5.7 (*Desigualdade das médias*). Mostre que a média aritmética de dois números reais a e b é sempre maior ou igual à sua média geométrica.

Problema 5.8 (*Método dos mínimos quadrados*). Dados os números reais $a_1, a_2, \dots, a_n$, encontre x tal que a soma $f(x) = \sum_{i=1}^n (x - a_i)^2$ seja mínima.

Problema 5.9 (*Lei de Snell-Descartes*). Um salva-vidas, saindo de um ponto A , precisa resgatar um mergulhador que está se afogando no mar, no ponto B . O salva-vidas corre na areia com uma velocidade v_1 e nada com uma velocidade v_2 tal que $v_1 > v_2$. Como o salva-vidas deve se mover a fim de chegar ao nadador no **menor tempo possível**?

Problema 5.10 (*Velocidade média e instantânea*). Um carro percorre 120 km em 1h30min. Qual é o valor da velocidade que podemos afirmar que, certamente, o carro assumiu?

Problema 5.11 (*Derivada constante*). Considere a função $f(x) = 5x + 3$. Aplique o Teorema do Valor Médio no intervalo $[1,4]$ e extraia o que isso revela sobre o gráfico de uma função afim.

Seção 5.3 - Derivadas e Gráficos

Problema 5.12 (*Unicidade de raízes*). Considere a função $f(x) = x^3 + x + 1$. Prove que ela é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e conclua que tal função possui no máximo uma raiz real.

Problema 5.13 (*Cinemática*). A posição de um objeto ao longo do tempo é dada por $S(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, com t em segundos e $S(t)$ em metros. Determine os instantes em que o corpo inverte o sentido do seu movimento.

Problema 5.14 (*Função quártica*). Considere a função $f(x) = x^5$. Há ponto de inflexão em $x = 0$?

Problema 5.15 (*Função assintótica*). Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Seção 5.4 - Aproximações e Séries de Taylor

Problema 5.16 (*Aproximação refinada*). Aproxime o valor de $\sqrt{36,7}$ por meio do polinômio de Taylor da função $f(x) = \sqrt{x}$ em torno de $x = 36$ para primeira e segunda ordens.

Problema 5.17 (*Taylor para integração*). Encontre uma expressão geral para a série de Maclaurin da função $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

Seção 5.5 - Regra de L'Hôpital

Problema 5.18 (*Quem vai a zero mais rápido*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^3}$.

Problema 5.19 (*Logaritmo vs polinômio*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}$, para $n > 0$.

Problema 5.20 (*Exponencial vs superexponencial*). Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^x}$.

5.7 Exercícios

Seção 5.1 - Taxas Relacionadas

Exercício 5.21 (*Sombra se movendo*). Uma pessoa de 1,8 m de altura caminha a 2 m/s em direção a um poste de 6 m de altura. Qual é a velocidade com que o comprimento da sombra está diminuindo?

Exercício 5.22 (*Pássaro em voo circular*). Um pássaro voa em uma trajetória circular de raio 100 m. Se o ângulo varrido pelo raio até o pássaro aumenta a 0,05 rad/s, a que velocidade linear ele se move?

Exercício 5.23 (*Satélite em órbita decrescente*). Um satélite se aproxima da Terra em trajetória circular decrescente. Se o raio da órbita diminui a 10 km/h e a velocidade

Exercício 5.35 (*Aplicação geométrica implícita*). Uma partícula percorre a curva $y = x^3 - 3x^2 + 2$ do ponto A ao ponto B , ambos com a mesma altura. Mostre que há um ponto intermediário onde sua velocidade vertical foi nula.

Seção 5.3 – Derivadas e Gráficos

Exercício 5.36 (*Picos e vales*). A função f é tal que:

- $f'(x) > 0$ para $x < -2$ e $x > 3$,
- $f'(x) < 0$ para $-2 < x < 3$,
- $f''(x) > 0$ para $x < 0$, e $f''(x) < 0$ para $x > 0$.

Desenhe o gráfico qualitativo de f , indicando claramente os intervalos de crescimento, decrescimento, concavidade e os pontos de máximo, mínimo e inflexão.

Exercício 5.37 (*Achar extremos e concavidades*). Considere a função $f(x) = x^4 - 4x^3$. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento, os extremos locais, a concavidade e os pontos de inflexão. Esboce o gráfico resultante.

Exercício 5.38 (*Gráfico com simetria*). A função f é par, derivável e satisfaz:

- $f(0) = 0$,
- $f'(x) > 0$ para $0 < x < 2$, e $f'(x) < 0$ para $x > 2$,
- $f''(x) < 0$ para todo $x \neq 0$.

Descreva e esboce qualitativamente o gráfico de f , indicando sua simetria, extremos e concavidade.

Exercício 5.39 (*Crescimento e ponto de inflexão escondido*). A função f é tal que $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)$. Determine os pontos críticos, os intervalos de crescimento e decrescimento, a concavidade e os pontos de inflexão. Esboce o gráfico completo de f .

Exercício 5.40 (*Gráfico com múltiplos extremos*). Considere a função $f(x) = x^5 - 5x^3$. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento, os extremos locais, os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão. Esboce o gráfico com base nessas informações.

Exercício 5.41 (*Análise sem cálculo*). A função f possui derivada negativa para $x < -1$, positiva para $x > -1$ e concavidade positiva em todo o domínio. O que isso nos diz sobre o gráfico de f ? Descreva qualitativamente sua forma e comportamento.

Seção 5.4 – Aproximações e Séries de Taylor

Exercício 5.42 (*Estimativa com logaritmo*). Utilize a aproximação linear de $\ln x$ centrada em $x = 1$ para estimar $\ln(1,05)$. O valor estimado é maior ou menor que o valor real? Justifique com base na concavidade da função.

Exercício 5.43 (*Função implícita e aproximação*). Considere a função $y = \sqrt{1 + \sin x}$. Use a aproximação de Taylor de $\sin x$ centrada em $x = 0$ até ordem 2 para obter uma aproximação de y em torno de zero.

Exercício 5.44 (*Estimando valor com precisão*). Use a série de Taylor de $\arctan x$ centrada em $x = 0$ para estimar $\arctan(0,1)$ com erro menor que 10^{-5} . Quantos termos da série são necessários?

Exercício 5.45 (*Raiz cúbica com aproximação linear*). Use a aproximação linear de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ centrada em $x = 8$ para estimar $\sqrt[3]{8,1}$. Compare com o valor real e estime o erro cometido.

Exercício 5.46 (*Aplicação da aproximação linear em Gravitação*). Sejam M e m as massas da Terra e de um satélite, respectivamente, e G a constante de gravitação universal. A energia potencial gravitacional de um satélite próximo à superfície da Terra é dada por

$$U(h) = -\frac{GMm}{R+h},$$

em que h é a altura em relação ao solo e R é o raio da Terra. Use uma aproximação linear em torno de $h = 0$ para obter uma fórmula aproximada de $U(h)$ próxima à superfície.

Seção 5.5 – Regra de L'Hôpital

Exercício 5.47 (*Produto indeterminado*). Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$. Reescreva a expressão de forma apropriada para aplicar a Regra de L'Hôpital.

Exercício 5.48 (*Limite clássico trigonométrico*). Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$. Utilize a Regra de L'Hôpital para justificar sua resposta.

Exercício 5.49 (*Crescimento comparativo*). Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$. Compare os crescimentos das funções envolvidas e justifique seu uso da Regra de L'Hôpital.

Exercício 5.50 (*Número de Euler*). Calcule: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Reconheça a forma indeterminada, use logaritmos e a Regra de L'Hôpital para resolver.

5.8 Resoluções dos Problemas

Seção 5.1 – Taxas Relacionadas

Problema 5.1

A relação entre a taxa de aumento do raio R e a taxa de aumento da área A do círculo será obtida derivando $A = \pi R^2$, donde segue que

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi R \frac{dR}{dt}.$$

Vemos, portanto, que a taxa de aumento da área no tempo, isto é, a velocidade dA/dt com que a área aumenta, depende tanto do valor do raio R naquele instante, como também da taxa $dR/dt = 2$ cm/s com que o raio aumenta. Quando $R = 5$ cm, tem-se

$$\frac{dA}{dt} = 2 \cdot 5\pi \cdot 2 = 20\pi \text{ cm}^2/\text{s}.$$

Problema 5.2

Sendo y a área do cateto variável e A a área do triângulo, segue que

$$A = \frac{5y}{2}.$$

Derivando a expressão acima, tem-se

$$\frac{dA}{dt} = \frac{5}{2} \frac{dy}{dt},$$

e, sendo $dy/dt = 1$ cm/s, segue que

$$\frac{dA}{dt} = 2,5 \text{ cm}^2/\text{s}.$$

Note, neste caso, que, diferente do Problema 5.1, a taxa de variação da área depende apenas de $\frac{dy}{dt}$ e não de y em si, de modo que quer o valor do cateto variável seja 5 cm, 16 cm ou qualquer outro, a taxa dA/dt será sempre constante.

Problema 5.3

Seja y a posição vertical do balão em um instante t qualquer e x a posição fixa do homem no solo, como mostra a Figura 5.22.

Como a figura indica, a distância D entre o balão e o observador é relacionada com as demais medidas pelo Teorema de Pitágoras:

$$D^2 = x^2 + y^2,$$

que, derivando em relação ao tempo, nos leva a

$$2D \frac{dD}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt},$$

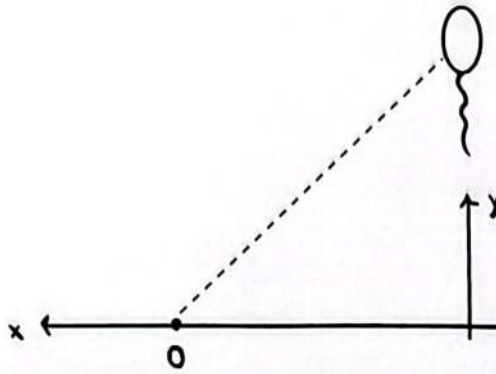


Figura 5.22: Posição relativa do homem em relação ao balão.

e, como o observador está parado, segue que $dx/dt = 0$, donde conclui-se que

$$\frac{dD}{dt} = \frac{y}{D} \frac{dy}{dt}.$$

No instante em que $y = 30$ m, sendo $x = 40$ m, o Teorema de Pitágoras nos diz que $D = 50$ m. Sendo a velocidade vertical do balão $dy/dt = 4$ m/s, teremos, neste instante, a taxa com que o balão se afasta do observador sendo

$$\frac{dD}{dt} = \frac{30}{50} \cdot 4 \text{ m/s} = 2,4 \text{ m/s}.$$

Problema 5.4

Considere um sistema de coordenadas cartesianas com origem no vértice do cone, como mostra a Figura 5.23. Queremos encontrar a velocidade instantânea dy/dt com que o nível da água aumenta quando $y = 8$ cm.

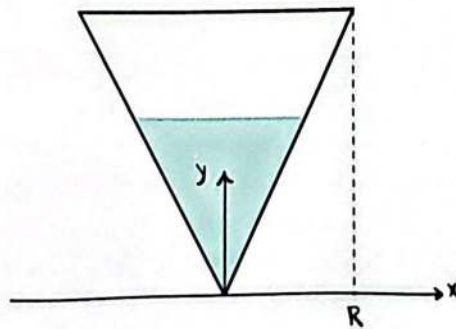


Figura 5.23: Enchendo o copo cônico com água.

O volume do cone é dado por

$$V = \pi x^2 y. \quad (5.10)$$

Por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{x}{y} = \frac{R}{H} \Rightarrow x = \frac{10}{20} y = \frac{y}{2},$$

que, na Equação (5.10), nos leva a

$$V = \frac{\pi}{4} y^3,$$

que, derivando em relação ao tempo, nos leva a

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi}{4} y^2 \frac{dy}{dt}.$$

Logo, no instante em que $y = 8$ cm, sendo a vazão $\frac{dV}{dt} = 5 \text{ cm}^3/\text{s}$, teremos a velocidade instantânea de aumento do nível de água sendo

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{1}{8^2} \cdot 5 = \frac{5}{48\pi} \text{ cm/s}.$$

Problema 5.5

Dados os valores de a, b, θ, v_A e v_B , queremos encontrar a taxa $\frac{dx}{dt}$ com que a distância x entre os carros A e B aumenta. A Figura 5.24 evidencia a geometria do problema, sendo a relação matemática entre as grandezas da figura dada pela Lei dos Cossenos:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$

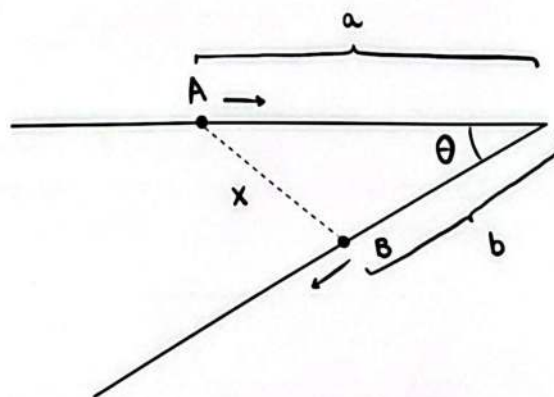


Figura 5.24: Cruzamento na estrada.

Derivando em relação ao tempo a expressão da Lei dos Cossenos, somos levados a

$$2x \frac{dx}{dt} = 2a \frac{da}{dt} + 2b \frac{db}{dt} - 2 \cos \theta \left(a \frac{db}{dt} + b \frac{da}{dt} \right),$$

em que o fator $\cos \theta$ pode ser retirado da derivada, uma vez que θ é constante. Sendo

$$v_A = \frac{da}{dt} \text{ e } v_B = \frac{db}{dt},$$

somos levados a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_A(a - b \cos \theta) + v_B(b - a \cos \theta)}{x}.$$

Seção 5.2 – O Teorema do Valor Médio

Problema 5.6

A Figura 5.25 mostra duas possibilidades de retângulos inscritos na parábola, com uma das bases no eixo x e estando sempre acima de tal eixo.

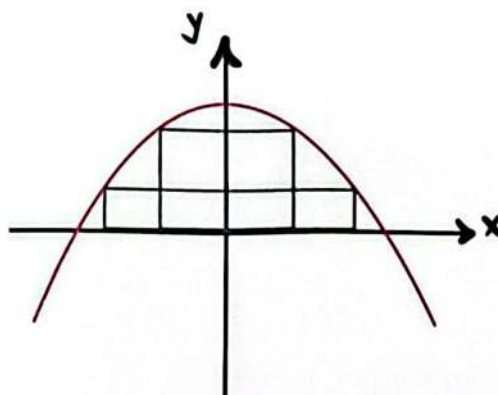


Figura 5.25: Retângulo inscrito na parábola

Considere os vértices do retângulo nos pontos $(x,0)$, $(-x,0)$, $(f(x),0)$ e $(f(-x),0)$. Sua base, de dimensão $2x$, se encontra sob o eixo horizontal, e sua altura, sendo a função par, vale $f(x) = 4 - x^2$. Logo, sua área vale

$$A(x) = 2xf(x) = 2x(4 - x^2) = -2x^3 + 8x.$$

Derivando tal expressão e igualando a zero, obtemos

$$0 = \frac{dA}{dx} = -6x^2 + 8,$$

de onde tem-se $x = 2\sqrt{3}/3$, o que especifica o retângulo em questão de área máxima.

Sabemos que tal área é máxima, neste momento, por interpretação: a Figura 5.25 mostra que a exigência de que o triângulo esteja acima do eixo x certamente impõe um teto máximo para o valor de sua área, uma vez que a área da região da parábola acima de tal eixo é, naturalmente, limitada. Não poderíamos ter o retângulo de menor área, pois este não existe: sempre podemos escolher um retângulo inscrito na parábola com uma área menor, basta fazer x tender a zero.

Problema 5.7

A forma mais elegante que os autores encontraram para resolver este problema consiste, inicialmente, em tirar um coelho da cartola. Tal coelho é a função

$$f(x) = \frac{x + \frac{k^2}{x}}{2}, \quad x > 0 \text{ e } k \in \mathbb{R}_+^*.$$

Note que tal função é simplesmente a média aritmética entre os termos x e k^2/x ,

sendo o produto de tais termos constante:

$$x \cdot \frac{k^2}{x} = k^2.$$

Note que k é igual à média geométrica dos termos x e k^2/x :

$$\sqrt{x \cdot \frac{k^2}{x}} = k.$$

É evidente que $f(x) > 0$ para todo x no seu domínio, de modo que a função deve admitir, caso o faça, um mínimo. Tomando sua derivada e igualando a zero, temos

$$0 = \frac{df}{dx} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k^2}{x^2} \right),$$

cujas soluções, no domínio de f , é $x = k$.

Ora, sendo k o valor mínimo de f e igual à média geométrica dos termos, bem como sendo f dado pela média aritmética dos mesmos termos, fica provado que a média aritmética é maior que ou igual à geométrica, isto é

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Neste caso, tais termos eram $a = x$ e $b = k^2/x$.

Problema 5.8

Como temos uma soma de quadrados, é evidente que ela não é limitada superiormente, mas sim inferiormente. Desse modo, podemos encontrar o mínimo derivando e igualando a zero:

$$0 = f'(x) = 2 \sum_{i=1}^n (x - a_i) = 2 \left(nx - \sum_{i=1}^n a_i \right),$$

em que usamos o fato de que a derivada da soma é a soma das derivadas e a derivada de uma constante (no caso, 2) multiplicada por uma função é igual a tal constante multiplicada pela derivada da função.

Igualando tal derivada a zero, vemos que a solução de $f'(x) = 0$ é dada por

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Ou seja, a função $f(x)$ atinge o seu mínimo quando x é a média aritmética dos números $a_1, a_2, \dots, a_n$. Este resultado mostra que a média aritmética é o ponto que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos dados. Por isso, ela é tão central na Estatística e aparece naturalmente como “melhor estimador” no método dos mínimos quadrados, usado, por exemplo, em regressão linear.

Problema 5.9

O nosso salva-vidas possui algumas opções, como mostra a Figura 5.26. Correr em linha reta de A até a posição do nadador B certamente será o menor percurso, mas não necessariamente o percurso de tempo mínimo, que é o que buscamos. Uma análise rápida mostra que o caminho II seria mais eficiente, uma vez que nele aumenta-se o trecho na areia, onde a velocidade v_1 é maior, e diminui-se o trecho na água, onde a velocidade v_2 do salva-vidas é menor.

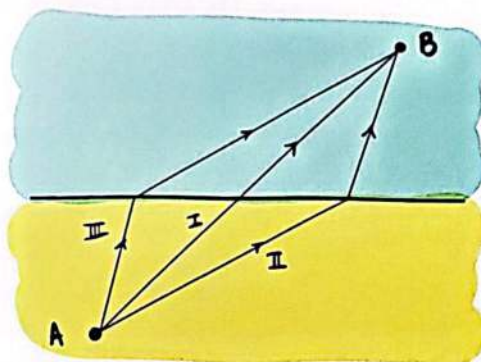


Figura 5.26: A refração da luz e o experimento do salva-vidas

Já o trecho III, pelas mesmas razões, certamente é menos eficiente em termos de otimizar o tempo de percurso. Dito isso, buscamos algo parecido com o caminho II. Logo, queremos então saber qual é o ponto O , na superfície que separa a areia da água, no qual o nosso herói deve se direcionar a fim de tomar o caminho de tempo mínimo. A Figura 5.27 irá nos conduzir a este resultado. Nessa figura, seja

$$\overline{AP} = x, \quad \overline{OP} = y_1 \quad \text{e} \quad \overline{OQ} = y_2.$$

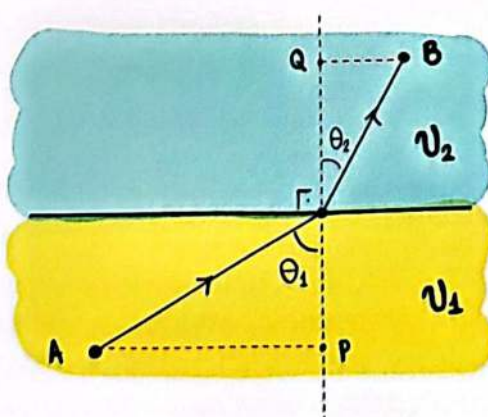


Figura 5.27: A construção do caminho de tempo mínimo.

Note que y_1 e y_2 são constantes: eles estão fixados uma vez que fixa-se os pontos A e B , isto é, para qualquer ponto O ao longo da reta horizontal que divide a praia do mar que o salva-vidas queira escolher para mergulhar, os valores de y_1 e y_2 serão

os mesmos. Outra grandeza que também é fixa no problema é a distância horizontal L entre os pontos A e B , de modo que podemos escrever que $\overline{BQ} = (L - x)$. O tempo total de percurso será, portanto:

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L - x)^2 + y_2^2}}{v_2}.$$

Veja que a expressão acima fornece o tempo $t(x)$, dado que todos os demais parâmetros são constantes. Logo, a fim de minimizá-lo, tomamos sua derivada e procuramos o ponto em que ela se anula:

$$0 = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y_1^2}} \cdot 2x - \frac{1}{v_2} \frac{1}{2\sqrt{(L - x)^2 + y_2^2}} \cdot 2(L - x),$$

de onde segue imediatamente que

$$\frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} = \frac{1}{v_2} \frac{L - x}{\sqrt{(L - x)^2 + y_2^2}},$$

ou seja:

$$\boxed{\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}}.$$

Tal expressão, que fornece a condição que minimiza o tempo de percurso, é conhecida como **Lei de Snell-Descartes**, e fornece o comportamento da luz ao mudar de um meio no qual sua velocidade é v_1 para outro no qual sua velocidade é v_2 . Isso está baseado no **Princípio de Fermat**, que diz que a luz sempre se move de modo a minimizar o tempo de percurso, como nosso salva-vidas.

Problema 5.10

Considere a função $S(t)$ que indica a posição S do carro para cada instante t , em horas. Assuma que, em $t_0 = 0$, temos $S(0) = 0$. Logo, teremos $S(1,5) = 120$ km e a velocidade média neste intervalo é

$$v_M = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(1,5) - S(0)}{t - 0} = 80 \text{ km/h}.$$

É razoável supor que a posição $S(t)$ do carro ao longo de seu movimento – qualquer que seja ele – não possui saltos, buracos ou quinas, isto é, o carro passa suavemente por todas as posições, sem mudanças bruscas. Matematicamente, estamos dizendo que a função $S(t)$ é contínua e derivável no intervalo, o que nos permite aplicar o Teorema do Valor Médio e concluir que há ao menos um valor de $t \in [0, 1,5]$ tal que

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 80 \text{ km/h},$$

ou seja, em todo o trecho, deve haver ao menos um ponto em que a velocidade instantânea do carro coincide com sua velocidade média em todo o trecho.

Problema 5.11

Seja $f(x) = 5x + 3$. Aplicamos o Teorema do Valor Médio no intervalo $[1, 4]$. A derivada da função é constante:

$$f'(x) = 5.$$

A variação média da função no intervalo é:

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{23 - 8}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Portanto, existe $c \in (1, 4)$ tal que $f'(c) = 5$, como garante o Teorema do Valor Médio. Entretanto, como $f'(x) = 5$ para todo x , **qualquer ponto do intervalo** satisfaz a conclusão do teorema.

Disso conclui-se que, para funções afim, a derivada é constante e igual à taxa de variação média em qualquer intervalo. O gráfico da função coincide com sua própria reta secante, e o TVM é satisfeito trivialmente por todos os pontos. Isso certamente não deve ser surpresa para o leitor, mas seria uma forma de mostrar que o gráfico de tal função é uma reta caso não soubéssemos deste fato.

*Seção 5.3 – Derivadas e Gráficos***Problema 5.12**

Considere a função $f(x) = x^3 + x + 1$. Calculemos sua derivada:

$$f'(x) = 3x^2 + 1.$$

Como $3x^2 \geq 0$ para todo x , temos:

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0.$$

Logo, f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$. Suponha, por absurdo, que existam dois pontos $a < b$ tais que $f(a) = f(b) = 0$.

Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[a, b]$, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - 0}{b - a} = 0.$$

Porém isso é impossível, pois já mostramos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Disso concluímos que a função $f(x) = x^3 + x + 1$ é estritamente crescente, e portanto, a equação $f(x) = 0$ possui no máximo uma raiz real.

Problema 5.13

Sendo $S(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ a função da posição, a velocidade do objeto é dada por

$$v(t) = \frac{dS}{dt} = 3t^2 - 12t + 9,$$

e sua aceleração é dada por

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 12.$$

A aceleração – a taxa de variação da velocidade – é a derivada segunda da posição: mede a taxa de variação da taxa de variação da posição. O instante em que o objeto troca o sentido de seu movimento é aquele no qual a velocidade muda de sinal, ou seja, é o instante em que a aceleração – que é a taxa de variação da velocidade – se anula:

$$0 = a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 \implies t = 2s.$$

Em termos mais matemáticos, em $t = 2$ teremos um ponto de inflexão da função $S(t)$, uma vez que o ponto em que a derivada segunda se anula e no qual a derivada primeira – a velocidade – muda de sinal, ou seja, é um ponto no qual a concavidade do gráfico muda.

Problema 5.14

Temos $f(x) = x^5$, de onde segue que $f'(x) = 5x^4$ e $f''(x) = 20x^3$.

Vemos que $x = 0$ é raiz da equação $f''(x) = 0$, de modo que **possivelmente** temos um ponto de inflexão. Para ser ponto de inflexão, contudo, não basta apenas que $f''(x) = 0$, é preciso que a concavidade do gráfico mude em tal ponto, ou seja, a derivada segunda deve trocar de sinal. Isso de fato acontece, pois sendo $f''(x) = 20x^3$, é imediato que

(i) $f''(x) < 0$ para $x < 0$,

(ii) $f''(x) > 0$ para $x > 0$.

Ou seja, em $x = 0$ teremos, de fato, um ponto de inflexão.

Problema 5.15

Sigamos o nosso protocolo para esboço de gráficos:

Domínio: claramente não há nenhum tipo de restrição, sendo $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Interseções com os eixos: vemos que a única raiz da função é $x = 0$, onde temos, também, $y = 0$, ou seja, o gráfico passa pela origem.

Simetrias: vemos que $f(-x) = -f(x)$, de modo que temos uma função ímpar, cujo gráfico, portanto, será simétrico em relação à origem. Dito isso, precisamos estudar a função apenas para $x > 0$.

Crescimento e decrescimento (sinal da primeira derivada): sua primeira derivada é

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^3},$$

de onde segue que

- $f'(x) > 0$ para $0 < x < 1$, ou seja, a função é crescente nesse intervalo.
- $f'(x) < 0$ para $x > 1$, ou seja, a função é decrescente nesse intervalo.

Além disso, $f'(x)$ se anula em $x = 1$, ponto no qual a função deixa de ser crescente para se tornar decrescente, o que indica que temos um pico, ou seja, um máximo local.

Concavidade (sinal da segunda derivada): sua derivada segunda é

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^4}.$$

É imediato que em $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3}$, temos $f''(0) = 0$, ou seja, temos possíveis pontos de inflexão. Pela simetria da função, sabemos que em $x = 0$ certamente teremos um ponto de inflexão (tente espelhar um gráfico – desde que não seja uma função linear – em relação à origem e você verá a concavidade mudando).

É também fácil perceber que, para $0 < x < \sqrt{3}$, teremos sempre $f''(x) < 0$, ou seja, a concavidade é para baixo neste intervalo. Além disso, vemos que para $x > \sqrt{3}$ temos $f''(x) > 0$, de modo que a concavidade fica para cima, e em $x = \sqrt{3}$ teremos, portanto, um ponto de inflexão. O seu simétrico também o será devido à paridade da função.

Pontos notáveis: recapitulando, temos:

- A função passa pela origem, sendo $x = 0$ sua única raiz. Além disso, a origem é um ponto de inflexão.
- Em $x = 1$, temos um máximo local (e em $x = -1$ teremos um mínimo local, por simetria).
- Em $x = \sqrt{3}$, temos um ponto de inflexão (e em $x = -\sqrt{3}$, por simetria).
- A concavidade é para baixo ($f''(x) < 0$) quando $0 < x < \sqrt{3}$ e para cima ($f''(x) > 0$) quando $x > \sqrt{3}$. Devido à simetria da função, dispensa-se a necessidade de avaliar a concavidade para $x < 0$.

Assíntotas: por fim, é fácil ver que a função possui assíntota horizontal em $y = 0$ quando $x \rightarrow \infty$, isto é

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0,$$

que vem a ser a única assíntota da função. Com todas essas informações, é fácil construir o seu gráfico, que aparece na Figura 5.28.

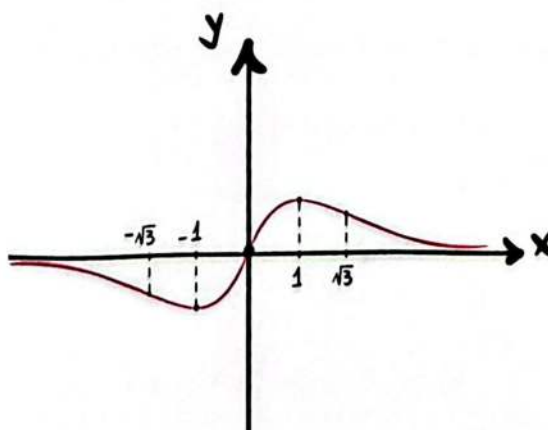


Figura 5.28: Gráfico da função $f(x) = x/(x^2 + 1)$.

Seção 5.4 - Aproximações e Séries de Taylor

Problema 5.16

As primeiras derivadas de $f(x) = x^{1/2}$ são:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \text{ e } f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

Logo, em torno de $x = 36$, teremos

$$f(36) = 6, \quad f'(36) = \frac{1}{12}, \quad \text{e} \quad f''(36) = -\frac{1}{864},$$

e o polinômio de Taylor para $f(x) = \sqrt{x}$ em torno de $x = 36$ é, até segunda ordem, dado por

$$p_2(x) = f(36) + f'(36)(x - 36) + \frac{f''(36)}{2!}(x - 36)^2.$$

Substituindo os valores, teremos

$$p_2(x) = 6 + \frac{1}{12}(x - 36) - \frac{1}{1728}(x - 36)^2.$$

Tomando apenas o primeiro termo que envolve x , temos, em primeira ordem, que

$$\sqrt{36,7} \approx 6 + \frac{1}{12}(36,7 - 36) = 6,0583.$$

Essa é a aproximação linear, exatamente a que fizemos no Exemplo 4.17. Adicionando mais um termo, o da derivada segunda, temos, em segunda ordem, a aproximação mais refinada:

$$\sqrt{36,7} \approx 6 + \frac{1}{12}(36,7 - 36) + \frac{1}{1728}(36,7 - 36)^2 = 6,05801.$$

O valor exato é, até a quinta casa decimal, dado por $\sqrt{36,7} = 6,05805$. Isso evidencia que, quanto mais termos da série adicionarmos, mais precisa fica a aproximação.

Problema 5.17

Queremos determinar a série de Maclaurin da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Note que podemos reescrever essa expressão como $f(x) = \frac{1}{1-(-x^2)}$, que é exatamente o somatório da série geométrica:

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n, \quad \text{para } |r| < 1.$$

Neste caso, temos $r = -x^2$. Assim, a série de Maclaurin para $f(x)$ é:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad \text{para } |x| < 1.$$

Escrevendo os primeiros termos da série, teríamos

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

A função $f(x) = 1/(1+x^2)$ é infinitamente derivável, e sua série de Maclaurin pode, também, ser obtida via cálculo direto das derivadas em $x = 0$, como o leitor pode e deve verificar. No entanto, este método é mais trabalhoso e menos elegante neste caso do que a identificação direta com a série geométrica. A série converge para $f(x)$ no intervalo $|x| < 1$, que é a condição de convergência da série geométrica.

Essa série é interessante, pois nos permitirá, por exemplo, integrar a função $f(x) = 1/(1+x^2)$ no domínio em que $|x| < 1$. Como veremos mais adiante, a integral

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx$$

não possui solução imediata, ou seja, não existe uma função elementar que a resolva. Contudo, usando a série de Maclaurin para a função, poderíamos, dentro do intervalo de convergência da série, computar tal integral, que se tornaria

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx.$$

Ao longo do estudo de integração, o leitor verá que este procedimento será bastante útil.

Seção 5.5 – Regra de L'Hôpital

Problema 5.18

Queremos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^3}.$$

O polinômio de Taylor de primeira ordem para a função $\tan x$ fornece $\tan x \approx x$, de modo que veríamos que o limite tende ao infinito.

Por outro lado, tendo uma indeterminação do tipo $0/0$, poderíamos aplicar a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x}{3x^2} = \infty,$$

uma vez que a secante tende a 1 quando $x \rightarrow 0$.

Problema 5.19

Queremos calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}.$$

Note que temos uma indeterminação do tipo ∞/∞ . Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0,$$

o que mostra que qualquer potência x^n cresce mais rapidamente do que $\ln x$, para $n > 0$.

Problema 5.20

Queremos calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^x}.$$

Sendo a indeterminação do tipo ∞/∞ , podemos aplicar a Regra de L'Hôpital.

Computemos a derivada de $y = x^x$. Tomando o logaritmo dos dois lados, tem-se $\ln y = x \ln x$ e, derivando implicitamente com respeito a x , temos

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln x + x \frac{1}{x},$$

de onde segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} x^x = x^x (1 + \ln x).$$

Assim, aplicando a Regra de L'Hôpital ao limite, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^x (1 + \ln x)}.$$

e seguimos com a mesma indeterminação. Parece que isso não nos ajudou muito, certo? Lembre-se que nem sempre a simples aplicação direta da regra eliminará a indeterminação. Poderíamos continuar aplicando a regra repetidas vezes, mas não está com cara de que a coisa vai tomar um bom rumo. Tentemos um outro caminho.

Note que

$$x^x = e^{x \ln x},$$

de onde podemos reescrever o limite como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^{x \ln x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x(1 - \ln x)}.$$

Avaliemos o comportamento do expoente $x(1 - \ln x)$: o termo $(1 - \ln x)$, quando $x \rightarrow \infty$, tende a $(1 - \infty) = -\infty$. Logo, o termo $x(1 - \ln x)$ tende a $-\infty$ quando $x \rightarrow \infty$, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x(1 - \ln x)} = e^{-\infty} = 0.$$

Esse resultado mostra que, embora e^x cresça rapidamente, a função x^x cresce ainda mais rápido. A presença da variável tanto na base quanto no expoente do denominador cria um crescimento dominante, e a razão tende a zero. Potências com base variável como x^x superam exponenciais com base fixa.

Capítulo 6

Integrais

No Capítulo 2 já foi apresentada ao leitor a ideia principal do Cálculo Integral: encontrar a área abaixo de uma curva descrita pela função $f(x)$. Isso é feito dividindo a área, que possui um formato genérico, em retângulos, usualmente de mesma base. Ao calcular a área de cada um desses retângulos e somá-las, obtém-se uma aproximação da área debaixo da curva $f(x)$. Naturalmente, quanto mais finos esses retângulos, melhor será a aproximação.

Aqui nos deparamos com o principal problema: o comprimento da base dos retângulos e o número de retângulos utilizados. Claro, quanto maior o número de retângulos usados para aproximar a região, menor será o comprimento da base de cada um e melhor será o valor dessa aproximação. Então, em quantos retângulos deveríamos dividir? Dez? Talvez cem? Ou será que dividimos em 10^{100} retângulos? Não importa em quantos retângulos dividamos, sempre será possível dividir em mais e melhorar essa aproximação, concorda?

A essa altura já lhe é familiar o problema de lidar com infinito e com tamanhos infinitesimais, portanto, analisemos esse problema em mais detalhes.

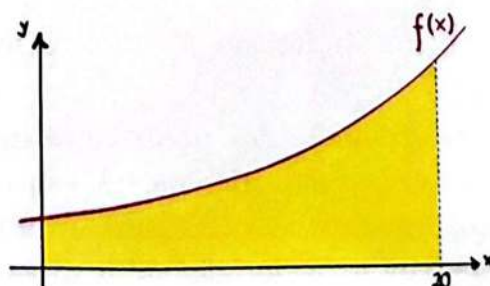


Figura 6.1: Área sob a curva de uma função genérica $f(x)$.

6.1 Ideia Básica do Cálculo Integral

Conforme mencionado, o problema do Cálculo Integral consiste basicamente em calcular a área sob uma curva descrita pela função $f(x)$. Para ilustrar essa situação, suponha que desejamos calcular a área abaixo da função $f(x)$ entre $x = 0$ e $x = 20$, conforme a Figura 6.1.

A ideia básica, à qual o leitor, também, já foi apresentada, é dividir essa área em um número pré-definido de retângulos. Ou seja, dividir o intervalo desejado em intervalos menores e, a princípio, de mesmo comprimento. A Figura 6.2 mostra o trecho dividido em $n = 4$ e $n = 10$ intervalos.

No entanto, observe que há uma diferença entre as figuras. Nas situações das figuras à esquerda, a altura de cada retângulo foi avaliada no limite superior do intervalo. Por exemplo, para o caso em que $n = 4$, as alturas dos quatro retângulos foram, respectivamente, $f(5)$, $f(10)$, $f(15)$ e $f(20)$. Já nas situações das figuras à direita, a altura de cada retângulo foi avaliada no limite inferior do intervalo. Por exemplo, para o caso em que $n = 4$, as alturas dos quatro retângulos foram, respectivamente, $f(0)$, $f(5)$, $f(10)$ e $f(15)$.

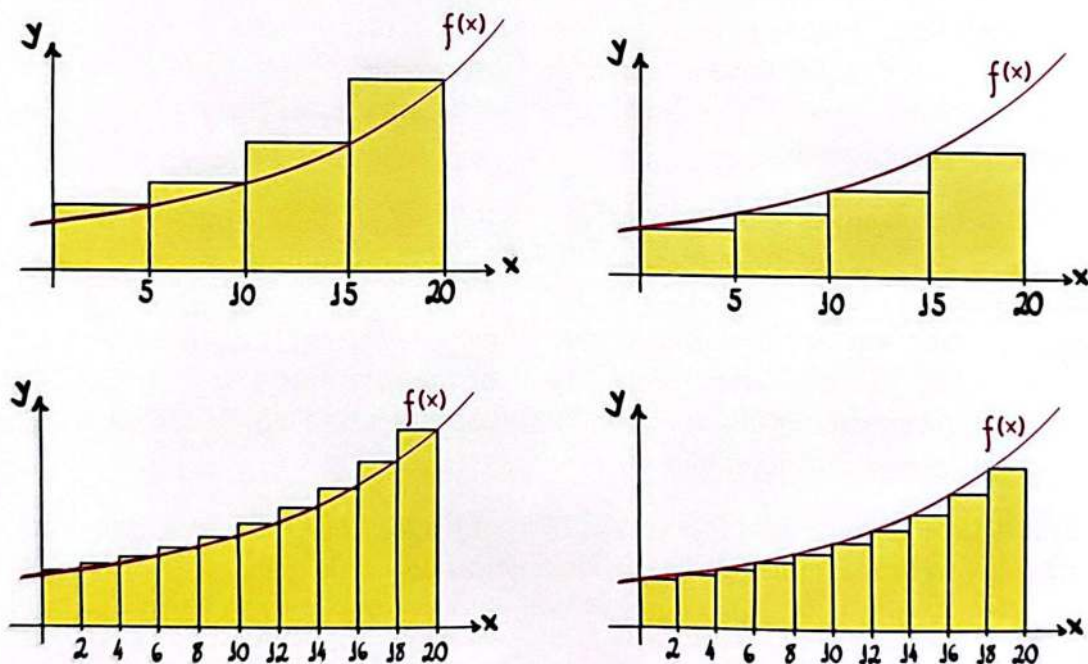


Figura 6.2: Área sob a curva da função $f(x)$ aproximada por retângulos.

É evidente que, independentemente dos pontos nos quais escolhemos avaliar as alturas dos retângulos, haverá erros nos cálculos. À esquerda, nós superestimamos e à direita, nós subestimamos as áreas. No entanto, o ponto de maior importância é notar que, quanto maior o número n de intervalos que decidamos dividir, melhor será a aproximação, independente dos pontos de avaliação das alturas dos retângulos. Com $n = 4$ podemos ver que a aproximação ficou extremamente grosseira, enquanto para $n = 10$ essa aproximação ficou significativamente melhor.

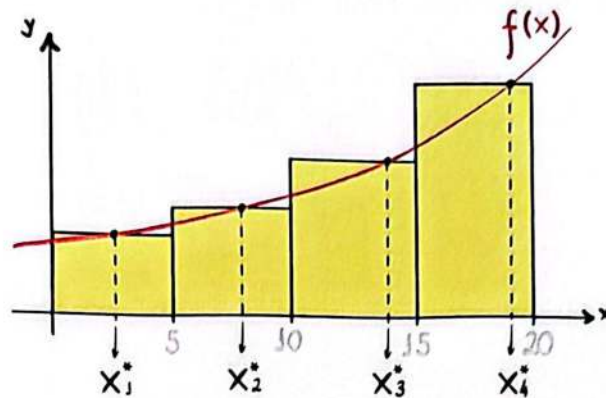


Figura 6.3: Pontos de avaliação de $f(x)$ no intervalo i .

Existe uma regra chamada **Regra do Ponto Médio**. Ela sugere que, em prol de uma melhor aproximação, escolhamos o ponto médio de cada intervalo. Para casos em que o cálculo é feito de maneira manual e deseja-se uma melhor precisão, isso, de fato, gera resultados interessantes.

Entretanto, é possível mostrar o incrível fato de que, quando dividimos em um número muito grande de intervalos, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, essa escolha não tem absolutamente nenhuma influência. Qualquer ponto no intervalo pode ser escolhido sem a menor perda de precisão, portanto, não se preocupe com quais pontos escolher, façamo-los de forma arbitrária.

Fica convencionado, a partir de agora, que ao dividir um determinado intervalo em n retângulos, x_i^* será o valor de x no qual a função será avaliada no intervalo i para servir como altura do retângulo. A Figura 6.3 ilustra essa situação.

Para exemplificar o procedimento, calculemos a área debaixo da curva $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ e $x = 1$. Esse é um bom exemplo, pois, com alguns conhecimentos algébricos, conseguimos uma expressão analítica que permite fazer esses cálculos com precisão, como veremos a seguir.

Vamos começar dividindo em $n = 3$ subintervalos. Essa situação está ilustrada na Figura 6.4. Observe que o ponto escolhido para avaliação da altura do retângulo

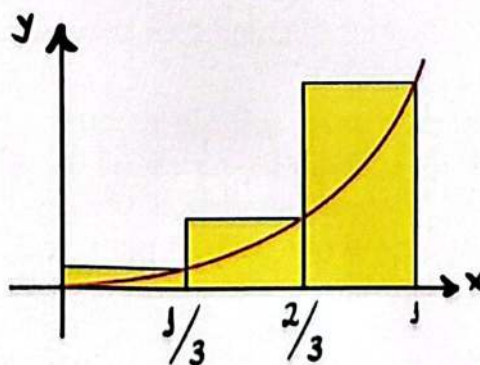


Figura 6.4: Divisão em 3 subintervalos.

foi o limite superior de cada subintervalo. Assim, o valor aproximado da área seria:

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 (1^2 + 2^2 + 3^2) = 0,518519. \end{aligned}$$

Pode-se ver claramente que o valor encontrado é superior ao valor exato da área sob a curva.

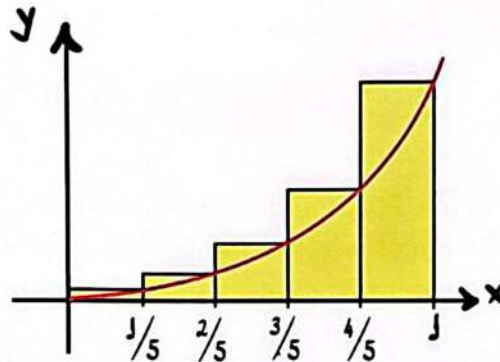


Figura 6.5: Divisão em 5 subintervalos.

Agora, vamos refinar a nossa aproximação, dividindo o intervalo em $n = 5$ intervalos. A situação está ilustrada na Figura 6.5. Os pontos escolhidos para avaliação das alturas dos retângulos foram, também, os limites superiores dos intervalos. O valor da aproximação então fica:

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{5}{5}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 0,440000. \end{aligned}$$

Observe que o valor diminuiu significativamente, mas, ainda assim, é superior ao valor exato da área. Façamos o mesmo procedimento para $n = 10$. A Figura 6.6 ilustra a situação e a aproximação é calculada na sequência.

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{2}{10}\right)^2 + \dots + \frac{1}{10} \left(\frac{10}{10}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{10}\right)^3 (1^2 + 2^2 + \dots + 10^2) = 0,385000. \end{aligned}$$

Observe que, novamente, o valor obtido reduziu significativamente. Mas como a própria figura indica, ainda não é uma aproximação tão precisa. Esse valor ainda continua acima daquele que de fato representa a área real. Naturalmente, quanto

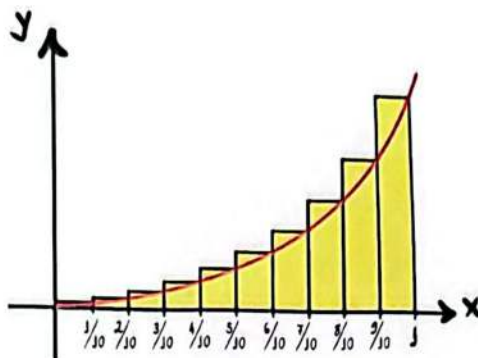


Figura 6.6: Divisão em 10 subintervalos.

maior for a quantidade n de intervalos, melhor ficará essa aproximação. É natural, neste ponto, fazer os seguintes questionamentos:

- *o quão perto conseguimos chegar do valor real da área?*
- *o quanto isso irá nos custar?*

Primeiramente, observe o padrão que surgiu ao calcular esse somatório. Assim, no caso de dividir o intervalo em n subintervalos, a expressão para o cálculo da área ficaria:

$$S_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 (1^2 + 2^2 + \dots + n^2). \quad (6.1)$$

Apesar de não ser nada absurdo calcular manualmente as somas acima (com valores relativamente pequenos de n), caso desejássemos obter aproximações mais precisas, ou seja, com um número maior n de intervalos, essa tarefa ficaria inviável. No entanto, como já lhe adiantei previamente, a soma dos quadrados dos n primeiros naturais possui uma expressão relativamente conhecida. Sua demonstração está no Apêndice B e ela é dada por:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (6.2)$$

Dessa maneira, substituindo a Equação (6.2) na fórmula de S_n dada pela Equação (6.1), obtemos uma expressão final para o cálculo da área:

$$S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \quad (6.3)$$

A Tabela 6.1 mostra os valores obtidos para diferentes valores de n . Ela nos leva a acreditar que essa área se aproxima de $0,333\dots$ e, de fato, o valor exato dessa área é $S = 1/3$. Isso pode ser evidenciado calculando o limite da função dada pela Equação (6.3) quando $n \rightarrow \infty$, como é mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \end{aligned}$$

n	S _n
3	0,518519
5	0,440000
8	0,398438
10	0,385000
100	0,338350
1.000	0,333834
10.000	0,333383
100.000	0,333338

Tabela 6.1: Valores da área abaixo da curva $f(x) = x^2$ para diversas quantidades de retângulos.

$$= \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{1}{3}.$$

Diga-me com sinceridade, caro leitor: não compartilha comigo da opinião de que isso é simplesmente fantástico? O momento em que eu descobri pela primeira vez que eu era capaz de calcular a área abaixo de uma **parábola** comecei a sentir que eu tinha, de fato, um grande poder em minhas mãos.

Esse caso que lhe foi apresentado é particularmente interessante e é, em alguma medida, uma variação do cálculo feito por Arquimedes abordado no Capítulo 2. O grego lá optou por varrer a parábola por infinitos triângulos, enquanto aqui nós o fizemos varrendo-a por infinitos retângulos.

Assim como este problema, existem vários outros em que é possível definir uma expressão fechada para o somatório. No entanto, na maioria dos problemas com os quais vamos nos deparar, infelizmente, não será possível encontrar uma expressão conhecida para o somatório como fizemos aqui. Ou, pelo menos, o trabalho de fazê-lo será tão grande que não valerá o esforço. Alguns casos comuns em que isso é possível são:

- A soma dos n primeiros naturais:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (6.4)$$

- A soma dos quadrados dos n primeiros naturais (que foi a expressão apresentada):

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (6.5)$$

- A soma dos cubos dos n primeiros naturais (essa é um pouco menos conhecida):

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2. \quad (6.6)$$

Mas imagine, por exemplo, que queiramos calcular a área debaixo da curva $f(x) = x^5$, também, entre $x = 0$ e $x = 1$. Fazendo o mesmo procedimento apresentado no problema anterior, ao dividir em n subintervalos, a área seria dada por:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^5 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^5 + \cdots + \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n}\right)^5 \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^6 (1^5 + 2^5 + \cdots + n^5). \end{aligned}$$

Observe que, para encontrar uma fórmula fechada para calcular essa área em função de n , precisaríamos encontrar primeiro uma expressão para a soma das potências quintas. Ou seja

$$1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 = ? \quad (6.7)$$

Pois é, esse não é um resultado notável facilmente obtido. Diga-se de passagem, o autor que vos escreve não conhece a expressão para tal de cabeça. A propósito, no curso “Lições de Matemática”, nós mostramos não só que é possível, mas também como fazer para encontrar tais expressões. *Baseando-se nas expressões que lhes apresentei, o leitor consegue fazer uma conjectura sobre o formato que essa expressão teria?*

Pois bem: existe um teorema que diz que a soma das potências de ordem p dos n primeiros naturais será sempre um polinômio de grau $(p + 1)$. Observe que esse padrão foi válido para as expressões obtidas nas Equações (6.4), (6.2) e (6.6). No caso, a soma da Equação (6.7), que é uma soma das potências de ordem $p = 5$, seria dada por um polinômio de grau 6, ou seja:

$$1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 = an^6 + bn^5 + cn^4 + dn^3 + en^2 + fn + g.$$

Agora, imagine a dificuldade para obter todos 7 os coeficientes: teríamos que substituir 7 valores e resolver um sistema com 7 equações e 7 incógnitas, o que incorreria em um trabalho aritmético significativo. Tudo isso que estou dizendo, caro leitor, é pra evidenciar a dificuldade que teríamos que enfrentar caso quiséssemos calcular a área debaixo de uma curva dessa natureza (ou de natureza ainda mais desafiadora).

É claro que, até então, estamos nos atendo apenas a funções polinomiais. Imagine tentar chegar a expressões para somatório de funções trigonométricas, ou exponenciais, ou trigonométricas inversas ou até mesmo combinações dessas funções... Seria um trabalho descomunal.

Sendo assim, calcular manualmente essas áreas debaixo de curvas se torna uma tarefa árdua para a maioria esmagadora das funções. Precisamos, portanto, de um método mais simples e genérico que permita realizar tal tarefa. Esse é o nosso grande objetivo.

Exemplo 6.1. Função Linear

Calcule a área debaixo da curva $f(x) = 2x$ entre $x = 0$ e $x = 4$ com:

a) $n = 2$ subintervalos.

- b) $n = 4$ subintervalos.
- c) Antes de proceder com um número maior de subintervalos, tente chegar a uma expressão geral para esse somatório.
- d) $n = 10$ subintervalos.
- e) $n = 100$ subintervalos.

De maneira genérica, dividindo o intervalo $[a, b] = [0, 4]$ em n subintervalos, cada um terá comprimento Δx dado por:

$$\Delta x = \frac{4 - 0}{n} = \frac{4}{n}.$$

Os respectivos valores de $f(x)$ avaliados no limite superior de cada intervalo serão

$$\left(\frac{4}{n}\right) \cdot 2, \left(\frac{8}{n}\right) \cdot 2, \left(\frac{12}{n}\right) \cdot 2, \dots, \left(\frac{4n}{n}\right) \cdot 2.$$

Assim, podemos aproximar o valor da área A_n , quando o intervalo é dividido em n subintervalos, por:

$$A_n = \frac{4}{n} \left(\left(\frac{4}{n}\right) \cdot 2 + \left(\frac{8}{n}\right) \cdot 2 + \left(\frac{12}{n}\right) \cdot 2 + \dots + \left(\frac{4n}{n}\right) \cdot 2 \right).$$

(a) Dividindo em $n = 2$ subintervalos:

$$A_2 = \frac{4}{2} \left(\left(\frac{4}{2}\right) \cdot 2 + \left(\frac{8}{2}\right) \cdot 2 \right) = 24.$$

(b) Dividindo em $n = 4$ subintervalos:

$$A_4 = \frac{4}{4} \left(\left(\frac{4}{4}\right) \cdot 2 + \left(\frac{8}{4}\right) \cdot 2 + \left(\frac{12}{4}\right) \cdot 2 + \left(\frac{16}{4}\right) \cdot 2 \right) = 20.$$

(c) Reescrevendo a expressão da equação de A_n , temos:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{4}{n} \left(\left(\frac{4}{n}\right) \cdot 2 + \left(\frac{8}{n}\right) \cdot 2 + \left(\frac{12}{n}\right) \cdot 2 + \dots + \left(\frac{4n}{n}\right) \cdot 2 \right) \\ &= \frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n} \cdot 2 (1 + 2 + 3 + \dots + n). \end{aligned}$$

A expressão contida no parênteses foi apresentada na Equação (6.4). Assim, substituindo na equação anterior, podemos escrever:

$$A_n = \frac{16(n+1)}{n}.$$

Observe que aplicando essa expressão para $n = 2$ e $n = 4$, corroboramos os resultados encontrados nos itens (a) e (b):

$$A_2 = \frac{16(2+1)}{2} = 24 ; \quad A_4 = \frac{16(4+1)}{4} = 20.$$

De posse dessa expressão, o leitor pode aplicar para qualquer valor de n . Sigamos nossa saga.

(d) Para $n = 10$, resolver de modo manual certamente irá tomará um bom tempo do leitor. Minha recomendação, no entanto, é que o leitor treine, escrevendo a expressão que fornecerá o resultado. Porém, é claro que a expressão encontrada no item (c) não foi à toa. Aplicando $n = 10$ nela, temos:

$$A_{10} = \frac{16(10+1)}{10} = 17,6.$$

(e) Naturalmente, para $n = 100$, a tarefa de calcular manualmente se torna inviável. Assim, utilizando a expressão genérica obtida no item (c), temos:

$$A_{100} = \frac{16(100+1)}{100} = 16,16.$$

A título de visualização, com a expressão podemos facilmente montar uma tabela com vários valores para A_n :

n	A_n
2	24,000
4	20,000
10	17,600
20	16,800
50	16,320
100	16,160
1.000	16,016

Tabela 6.2: Valores da área abaixo da curva $f(x) = 2x$ para diversas quantidades de retângulos.

A tabela sugere que a área tende ao valor $A = 16$. Isso de fato é verdade e pode ser verificado fazendo o esboço do gráfico, cuja área é um triângulo de base 4 e altura 8. Ou podemos, claro, aplicar o limite da função obtida com $n \rightarrow \infty$. Logo:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16(n+1)}{n}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{16n}{n} + \frac{16}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(16 + \frac{16}{n} \right) \\
 &= 16 + 0 = 16.
 \end{aligned}$$

Exemplo 6.2

Calcule a área debaixo da curva $f(x) = \sin x$ entre $x = 0$ e $x = \pi$ com:

- a) $n = 3$ subintervalos.
- b) $n = 6$ subintervalos.
- c) $n = 20$ subintervalos.

Os itens (a) e (b) são passíveis de fazer manualmente. No entanto, vamos formular de maneira genérica e aplicar o padrão obtido. Escolherei, mais uma vez de maneira arbitrária, o limite superior para avaliação do valor de $f(x)$ em cada intervalo.

De maneira genérica, dividindo o intervalo $[a, b] = [0, \pi]$ em n subintervalos, cada um terá comprimento Δx dado por

$$\Delta x = \frac{\pi - 0}{n} = \frac{\pi}{n}.$$

Como foi escolhido o limite superior de cada intervalo para avaliação de $f(x)$, esses respectivos valores serão dados por:

$$\sin\left(\frac{1\pi}{n}\right); \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right); \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right); \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right); \dots; \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right).$$

Assim, ainda de maneira genérica, podemos aproximar o valor da área A_n , quando o intervalo é dividido em n subintervalos por

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{\pi}{n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{n} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{n} \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \dots + \frac{\pi}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) \\
 &= \frac{\pi}{n} \left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) \right).
 \end{aligned}$$

Então, aplicando essa ideia para cada um dos itens, temos:

(a) Dividindo em $n = 3$ subintervalos:

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \frac{\pi}{3} \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{3}\right) \right) \\
 &= \frac{\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \approx 1,8138.
 \end{aligned}$$

(b) Dividindo em $n = 6$ subintervalos:

$$\begin{aligned} A_6 &= \frac{\pi}{6} \left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{6}\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{\pi(2 + \sqrt{3})}{6} \approx 1,9541. \end{aligned}$$

(c) Para efetuar os cálculos para $n = 20$ subintervalos, naturalmente vamos precisar usar o auxílio de uma calculadora. Para melhor ilustrar a situação, coloco a seguir uma tabela com os valores para diversos números de subintervalos:

n	A_n
3	1,813799
6	1,954097
10	1,983523
20	1,995886
50	1,999342
100	1,999835
1.000	1,999998
10.000	1,999999

Tabela 6.3: Valores da área abaixo da curva $f(x) = \sin(x)$ para diversas quantidades de retângulos.

Essa tabela nos leva a crer que essa área tende ao valor $A = 2$ e, de fato, ela é exatamente igual a 2. Mostraremos isso quando a ideia sobre integrais estiver totalmente concretizada.

Tendo em mente a formulação do exemplo anterior, voltemos ao problema original. Deseja-se calcular a área abaixo da curva $f(x)$ entre os valores $x = a$ e $x = b$. Consideremos que esse intervalo seja dividido em n subintervalos de mesmo comprimento. O comprimento Δx de cada subintervalo será dado por

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}. \quad (6.8)$$

Assim, a área de cada retângulo será dada por $f(x) \cdot \Delta x$ — o produto da altura pela base do retângulo, respectivamente. Dessa maneira, a área S abaixo da função $f(x)$ será dada pela soma das áreas de cada retângulo quando o número de retângulos tender a infinito. Ou seja,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f(x_1^*) \cdot \Delta x + f(x_2^*) \cdot \Delta x + f(x_3^*) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_n^*) \cdot \Delta x \right]. \quad (6.9)$$

Podemos escrever de maneira mais enxuta aplicando o sinal de somatório:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) \cdot \Delta x].$$

Esse somatório é chamado **Soma de Riemann**. Ele nos diz, basicamente, que podemos calcular a área sob qualquer curva através do limite dessa soma (tecnicamente isso não é possível para qualquer curva, posto que esse limite pode não existir, mas isso é assunto para conversas futuras).

Nesse momento, peço ao leitor uma atenção dobrada, pois apresentar-lhe-ei a **notação de integral**. Estamos fazendo a soma dos produtos dos valores da função em cada um dos n intervalos pelo comprimento de cada um dos intervalos, entre os limites a e b . Essa ideia pode ser inteiramente traduzida como:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx. \quad (6.10)$$

A Figura 6.7 ilustra o significado dessa integral definida.

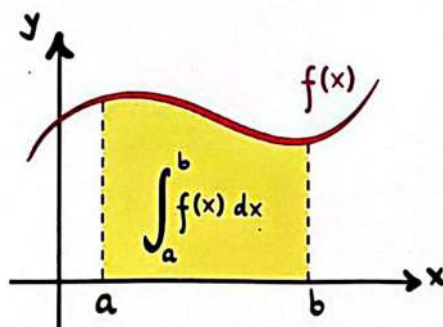


Figura 6.7: Significado geométrico da integral $\int_a^b f(x) dx$.

Vamos destrinchar cada elemento dessa notação:

Símbolo $\int$: Ele é definido como “sinal de integral”. Ele é simplesmente um S mais alongado, fazendo alusão ao S de somatório da Soma de Riemann.

Função $f(x)$: é denominada “integrando”. Ela representa a curva sob a qual desejamos calcular a área.

Os valores numéricos de a e b : indicam, respectivamente, os limites inferior e superior. Ou seja, indicam os valores de x entre os quais deseja-se avaliar a área sob a curva $f(x)$.

Símbolo dx : indica que a variável de cálculo da integral é x , uma vez que a função f está escrita em função de x . Geometricamente, ele significa o elemento infinitesimal: nos casos abordados, a base do retângulo. Esse símbolo, no entanto, terá um significado um pouco mais amplo à medida que avançarmos.

6.2 Teorema Fundamental do Cálculo

O objetivo dessa seção é estabelecer a relação entre integrais e derivadas. Em especial, vamos entender o conceito de integral definida e o que ela calcula.

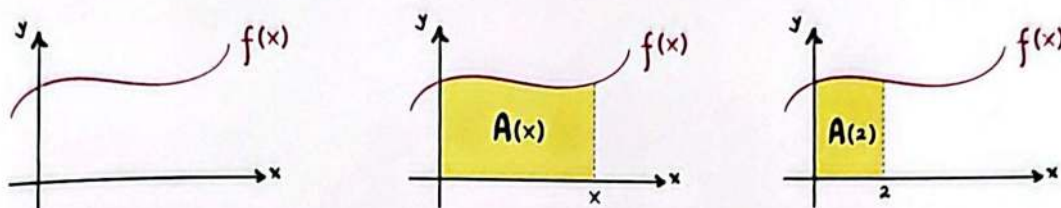


Figura 6.8: Função $f(x)$ genérica e função área $A(x)$.

Consideremos uma função $f(x)$ qualquer. Considere, também, que exista uma função denotada por $A(x)$ que fornece a área debaixo da função $f(x)$ no intervalo $[0, x]$, conforme a Figura 6.8. O significado de $A(2)$, por exemplo, está representado na última imagem dessa figura.

É natural imaginar que existe uma relação direta entre as funções $f(x)$ e $A(x)$. No entanto, neste momento, tal relação ainda é desconhecida, e é justamente isso que queremos determinar.

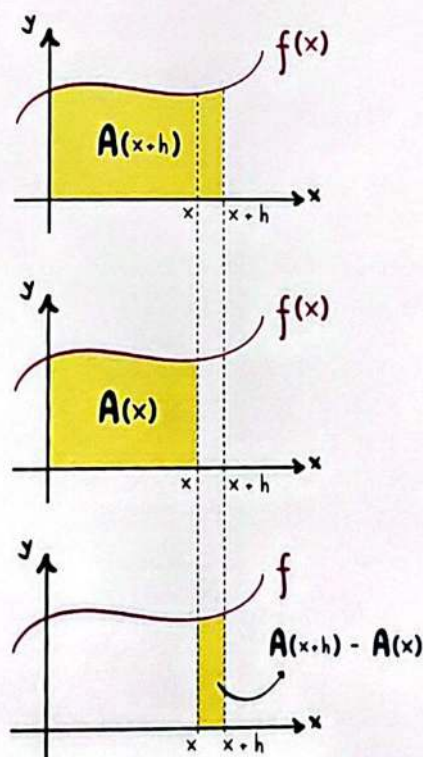


Figura 6.9: Área abaixo da curva $f(x)$ no intervalo $[x, x + h]$.

Considere agora um intervalo $\Delta x = h$. Como poderíamos calcular a área no intervalo $[x, x + h]$? Bom, uma vez que já conhecemos o comportamento da função $A(x)$, tal área será dada pela Equação (6.11) e está ilustrada na Figura 6.9.

$$S = A(x + h) - A(x). \quad (6.11)$$

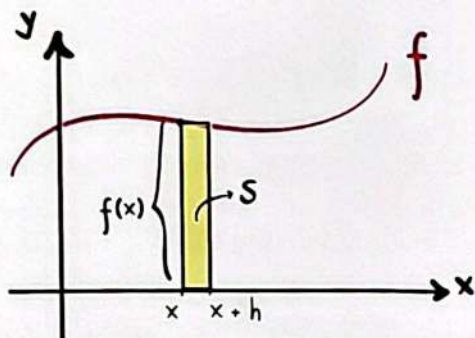


Figura 6.10: Elemento infinitesimal de área $S = f(x) \cdot h$.

Por outro lado, considerando um pequeno valor para h , podemos calcular o valor dessa área S como sendo a de um retângulo de base h e altura $f(x)$, conforme a Figura 6.10. Dessa maneira, podemos escrever S como

$$S \approx f(x) \cdot h, \quad (6.12)$$

em que essa aproximação tenderá ao valor exato à medida que h se aproximar de zero. Igualando as duas expressões, temos:

$$A(x + h) - A(x) \approx f(x) \cdot h.$$

Esse é um momento importante, pois é o primeiro momento em que conseguimos enxergar uma relação entre as funções $f(x)$ e $A(x)$. Isolando a função $f(x)$, temos:

$$f(x) \approx \frac{A(x + h) - A(x)}{h}. \quad (6.13)$$

Calculando o limite quando $h \rightarrow 0$ em ambos os lados, a aproximação tende para uma igualdade, de modo que teremos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} \\ f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Esse aqui é, sem sombra de dúvida, um dos momentos mais importantes deste livro, de modo que não poderíamos simplesmente seguir escrevendo sem chamar a atenção do leitor de maneira mais incisiva.

Essa expressão tem algum significado para você, caro leitor? Este é o melhor momento para você parar, olhar pra ela novamente e tentar digerir a informação que ela lhe traz. Faça isso antes de continuar.

A expressão obtida na Equação (6.14) é a **definição de derivada**. Ou seja, a **função $f(x)$ é a derivada da função $A(x)$** . Essa equação pode, então, ser escrita como

$$f(x) = A'(x) = \frac{dA}{dx}. \quad (6.15)$$

Encontramos, portanto, a relação que desejávamos desde o início.

Essa ideia que lhe foi apresentada consiste no **Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)**. Mais precisamente, no **Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 01 (TFC-01)**. Ele estabelece qual a relação entre uma função $f(x)$ e a função $A(x)$ que permite calcular a área debaixo dessa primeira curva. Essa é a ideia fundamental do Cálculo Integral.

No entanto, paremos novamente para pensar um pouco. Qual das opções a seguir você acha ser mais natural?

1. Ter a função $f(x)$ e desejar encontrar a função $A(x)$.
2. Ter a função $A(x)$ e desejar encontrar a função $f(x)$.

Sem sombra de dúvidas, a situação mais comum é a descrita na **opção 1**. Ou alguém já te deu a função que fornece a área debaixo de uma curva e te pediu pra calcular o formato da curva? Parece um pouco estranho, não? Portanto, o que queremos, de modo geral, é encontrar a função área $A(x)$, que fornece a área abaixo da curva descrita pela função $f(x)$. Seria simples calcular $f(x)$ a partir de $A(x)$: basta derivar a função $A(x)$. No entanto, desejamos fazer justamente o contrário: nós conhecemos a função $f(x)$ e temos a intenção de encontrar $A(x)$. Em outras palavras: **desejamos encontrar a função que, ao ser derivada, resulta em $f(x)$** . Trata-se, portanto, da operação inversa da derivada: a “**antiderivada**”.

$$f(x) \text{ é a derivada de } A(x) \iff A(x) \text{ é a antiderivada de } f(x).$$

Vamos a um exemplo para facilitar o entendimento do leitor.

Exemplo 6.3

Calcule as antiderivadas das funções a seguir.

- (a) $f(x) = 6x + 1$.
- (b) $g(x) = 12x^2$.
- (c) $h(x) = 10x^4$.

Até aqui não nos preocupamos em desenvolver um método para calcular uma antiderivada. Portanto, esse exercício, assim como os sugeridos no final do capítulo, foram pensados para serem resolvidos de modo intuitivo, baseado nos seus conhecimentos a respeito de derivada, para que o leitor comece a desenvolver o

processo de raciocínio e, em certa medida, enxergue por si mesmo o que iremos formalizar mais adiante. Assim, podemos ver que:

(a) A antiderivada $A(x)$ da função $f(x) = 6x + 1$ é

$$A(x) = 3x^2 + x, \quad \text{pois} \quad A'(x) = 6x + 1 = f(x).$$

Porém, antes de prosseguir, pergunto ao leitor:

Você se sentiu convencido?

É importante se atentar aos detalhes. O que você diria sobre o que há de comum nas funções a seguir?

$$A_1(x) = 3x^2 + x + 7 \quad ; \quad A_2(x) = 3x^2 + x - 5\pi \quad ; \quad A_3(x) = 3x^2 + x + 695.$$

O que há de comum é que, ao derivar qualquer uma delas, chegaríamos à mesma função $f(x)$. A diferença entre elas é apenas a constante, e o fato é que, como a derivada de uma constante é zero, ao somar uma constante a uma função, sua derivada não se altera. Isso nos faz notar um fato importante:

Uma função possui infinitas antiderivadas.

Assim, de maneira geral, vamos escrever a antiderivada $A(x)$ da função $f(x) = 6x + 1$ como:

$$A(x) = 3x^2 + x + C.$$

Atente-se, portanto, a isso:

A derivada de uma função é única. A antiderivada não.

Dito isso, podemos prosseguir.

(b) A antiderivada $A(x)$ da função $g(x) = 12x^2$ é

$$A(x) = 4x^3 + C, \quad \text{pois} \quad A'(x) = 12x^2 = g(x).$$

(c) A antiderivada $A(x)$ da função $h(x) = 10x^4$ é

$$A(x) = 2x^5 + C, \quad \text{pois} \quad A'(x) = 10x^4 = h(x).$$

Antes de enunciar o TFC, chamo a atenção do leitor para uma mudança na nomenclatura das funções. Na primeira parte desse capítulo, definimos a função genérica como $f(x)$ e a função que mais tarde viria a ser sua antiderivada como $A(x)$. Usamos $A(x)$ para deixar mais intuitivo, fazendo referência direta à **Área**.

A partir desse momento, no entanto, faremos uma alteração. Manteremos a função genérica como $f(x)$, mas, definiremos como $F(x)$ a sua antiderivada. Na verdade, sua família de antiderivadas, já que vimos que ela não é única.

Dessa maneira, podemos enunciar o **Teorema Fundamental do Cálculo** -

Parte 01 como:

Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 01 (TFC-01)

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$. Se $F(x)$ for uma função definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

então $F'(x) = f(x)$.

Traduzindo em palavras, o TFC-01 apresenta a relação existente entre uma função e sua integral. Ou seja, ele diz que se $F(x)$ é a integral de $f(x)$, então a derivada de $F(x)$ é igual à $f(x)$.

Já a **Parte 02** do TFC se refere à maneira de calcular a integral definida da função $f(x)$ entre dois valores dados. É exatamente a ideia que utilizamos no início deste capítulo. Então, enunciando de maneira formal, temos:

Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 02 (TFC-02)

Sejam uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ e $F(x)$ sua antiderivada. Assim,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

A expressão do lado esquerdo pode ser lida como *integral da função $f(x)$ com relação a x no intervalo $[a, b]$* ou, de maneira mais resumida, *integral de $f(x)$ entre a e b* .

O TFC-02 mostra que, para calcularmos a área debaixo da curva da função $f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$, basta que consigamos encontrar uma de suas antiderivadas $F(x)$ e a avaliemos em apenas dois pontos. Novamente, caro leitor, você consegue perceber a grandeza disso que foi construído?

Antes de encontrarmos a relação existente entre $f(x)$ e $F(x)$, calcular essa área se mostrou uma tarefa extremamente complexa para a maioria das funções. Agora, no entanto, para calcular essa área, basta conseguirmos definir uma das funções cuja derivada é $f(x)$ e avaliá-la em dois pontos. Em outras palavras, transformamos um problema contínuo (calcular a área ao longo de uma região) em um problema discreto (avaliar em apenas dois pontos). A esse processo de encontrar a “antiderivada”, batizamos-o honrosamente como “integrar”.

Finalmente, enunciando o **Teorema Fundamental do Cálculo** na forma completa, temos:

Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$.

1. Se $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, então $F'(x) = f(x)$.
2. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, onde F é uma antiderivada de f , ou seja, são funções tais que $F'(x) = f(x)$.

Observe que o único ponto ainda obscuro no enunciado desse teorema é o fato de a função $f(x)$ precisar ser contínua no intervalo. Isso não só é intencional, como também ficará claro nos exemplos subsequentes.

Exemplo 6.4

Calcule a área abaixo da curva $f(x) = 2x + 6$ entre $x = 1$ e $x = 5$.

A Figura 6.11 descreve essa situação.

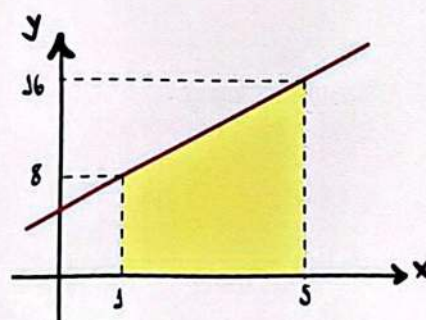


Figura 6.11: Gráfico da função $f(x) = 2x + 6$ e região de integração.

Naturalmente, essa é uma tarefa fácil, uma vez que sabemos que $f(x)$ é uma função afim e podemos calcular a área debaixo dela por conhecimentos básicos de Geometria Plana, sendo a área igual a 48. Nosso objetivo, contudo, é calcular essa área usando a nova ideia que construímos. O valor encontrado, no entanto, servirá para conferência, caso o leitor seja do tipo mais desconfiado.

Conforme a ideia que construímos até o presente momento, para calcular a área debaixo da curva $f(x)$ faz-se necessário encontrar a função $A(x)$, cuja derivada é $f(x)$. A essa altura o leitor já é um mestre na arte das derivadas, de modo que deve ser fácil ver que a antiderivada de $f(x)$ é

$$A(x) = x^2 + 6x + C,$$

você concorda? Observe que colocamos a constante $C \in \mathbb{R}$, uma vez que sua derivada é nula, como discutido anteriormente. Veremos mais adiante que quando

se trata de uma integral definida, essa constante é indiferente e poderemos ignorá-la. Porém, por enquanto vamos considerar a função $A(x) = x^2 + 6x + C$. Observe que a nossa premissa é que, definida a função $A(x)$, podemos calcular a área S debaixo da função $f(x)$ entre $x = 1$ e $x = 5$ fazendo

$$S = A(5) - A(1).$$

Avaliando esses valores, temos

$$A(5) = 5^2 + 6 \cdot 5 + C = 55 + C,$$

$$A(1) = 1^2 + 6 \cdot 1 + C = 7 + C.$$

Assim, a área procurada será

$$\begin{aligned} S &= A(5) - A(1) \\ &= (55 + C) - (7 + C) \\ &= (55 - 7) + (C - C) \\ &= 48. \end{aligned}$$

Dois pontos são importantes de serem ressaltados:

1. O valor da constante C da antiderivada, conforme antecipamos, é indiferente quando se trata de uma integral definida. Isso acontece, pois essa constante desaparece quando fazemos a subtração $A(b) - A(a)$.
2. O valor encontrado para a área corresponde ao que esperávamos. Que bom, não é mesmo?

Exemplo 6.5

Calcule a área debaixo da curva $f(x) = x^2 - 4x + 3$ entre:

- (a) $x = 4$ e $x = 6$.
- (b) $x = 1$ e $x = 6$.

(a) Para calcular a área A debaixo da curva $f(x)$, basta encontrarmos uma antiderivada $F(x)$ e avaliá-la nas extremidades do intervalo. Posteriormente, estudaremos técnicas para obtermos as antiderivadas de maneira mais rápida. Por ora, limitemo-nos a fazer o raciocínio inverso da derivada. Dessa maneira, para a atual função não é difícil ver que a função $F(x)$ será:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + C.$$

Uma rápida verificação pode ser feita para ver que $F'(x) = f(x)$.

Dessa maneira, a área desejada A será dada por:

$$A = \int_4^6 f(x) dx = F(6) - F(4).$$

Avaliando $F(x)$ nos limites de integração, temos:

$$F(6) = \frac{1}{3}6^3 - 2 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + C = 18 + C,$$

$$F(4) = \frac{1}{3}4^3 - 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + C = \frac{4}{3} + C.$$

Assim, a área procurada é dada por

$$\begin{aligned} A &= (18 + C) - \left(\frac{4}{3} + C\right) \\ &= \left(18 - \frac{4}{3}\right) + (C - C) \\ &= \frac{50}{3}. \end{aligned}$$

Observe, mais uma vez, que a constante C é indiferente no processo, como já mencionado.

(b) Por se tratar da mesma função, poderíamos fazer exatamente o mesmo procedimento feito no item (a), apenas trocando $x = 4$ por $x = 1$. Fazendo isso, temos:

$$F(6) = \frac{1}{3}6^3 - 2 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + C = 18 + C,$$

$$F(1) = \frac{1}{3}1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + C = \frac{4}{3} + C.$$

Assim, a área procurada seria dada por:

$$A = 18 - \frac{4}{3} = \frac{50}{3}. \quad (6.16)$$

A essa altura o leitor já deve ter percebido que este não se trata de um livro qualquer. Nele, questionamentos são feitos e estimulados a todo momento e, mesmo que você não saiba respondê-los de imediato, é esperado que você enxergue de forma crítica o processo e a construção que vem sendo feita. Desse modo, fica a pergunta ao leitor:

Esse resultado não lhe parece estranho?

Pare um instante, compare com o resultado anterior e reflita um pouco antes de continuar.

A estranheza à qual me refiro é a seguinte: se passamos a integrar entre $x = 1$ e $x = 6$ ao invés de integrar entre $x = 4$ e $x = 6$, nós aumentamos o intervalo de integração. Dessa maneira, é natural imaginarmos que a área aumentaria, no entanto, como vimos nos resultados, a área permaneceu a mesma. Como isso é possível?

Para responder a tal questionamento é necessário fazermos um esboço do gráfico da função, que aparece na Figura 6.12.

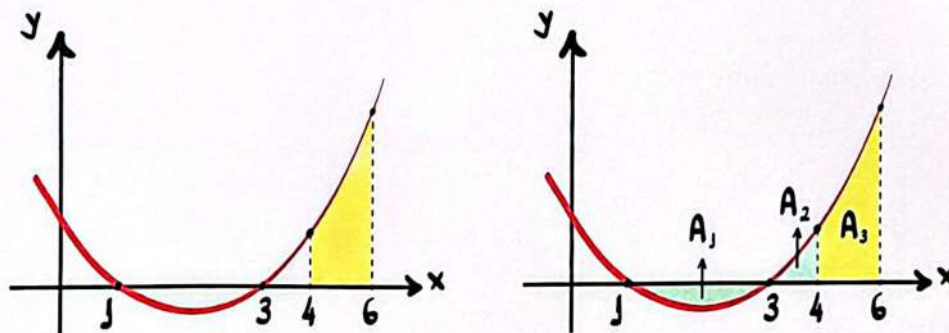


Figura 6.12: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Essa figura está dividida em duas partes:

- A imagem à esquerda mostra a área calculada no item (a), entre $x = 4$ e $x = 6$.
- A imagem à direita mostra a área calculada no item (b), entre $x = 1$ e $x = 6$.

De fato é evidente que a área a ser calculada no item (b) é maior. Entretanto, existe um detalhe que não foi levado em consideração. Entre $x = 1$ e $x = 3$, a área entre a função e o eixo x está **abaixo do eixo x** , o que é um fato extremamente importante.

Na Equação (6.12), que é o passo básico para a dedução do TFC-01, calculamos a área do retângulo. Para tal, consideramos a altura do retângulo como sendo $f(x)$.

Observe que, em prol do fácil entendimento, a região cuja área queríamos calcular estava inteiramente **acima do eixo x** .

Mas o que aconteceria se a região estivesse abaixo desse eixo?

Neste caso, valor de $f(x)$ nesse trecho seria negativo, o que implicaria uma **área negativa**. Fato que, pensando do ponto de vista geométrico, não faz muito sentido.

Assim, chegamos a uma conclusão muito importante:

Quando a região que se deseja calcular a área está abaixo do eixo x , ao aplicar a TFC-02, o valor obtido será negativo. Portanto, deverá ser empregado um ajuste no sinal.

Isso justifica porque a área obtida no item (b) não foi maior que a área obtida no item (a). Observe, no entanto, que a correção só pode ser feita por termos capazes de esboçar o gráfico da função $f(x)$ e vermos em que trechos a curva se encontra acima e abaixo do eixo x .

Analisando o gráfico, podemos subdividir a área A em duas partes. Por conveniência, iremos dividi-la em três partes: A_1 , A_2 e A_3 , conforme representado à esquerda na Figura 6.12.

Aqui podemos calcular individualmente:

- **Área A_1 :** Observe o ajuste no sinal, uma vez que se trata de uma região abaixo do eixo x .

$$A_1 = - \int_1^3 f(x) dx = -(F(3) - F(1)).$$

- **Área A_2 :**

$$A_2 = \int_3^4 f(x) dx = F(4) - F(3).$$

- **Área A_3 :**

$$A_3 = \int_4^6 f(x) dx = F(6) - F(4).$$

Uma vez que já temos a função $F(x)$, basta avaliá-la nos pontos necessários:

$$F(1) = \frac{4}{3}, \quad F(3) = 0, \quad F(4) = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad F(6) = 18.$$

Substituindo, temos:

$$F(1) = \frac{4}{3}, \quad F(3) = 0, \quad F(4) = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad F(6) = 18,$$

de onde é imediato obter que

$$A_1 = - \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{4}{3}, \quad A_2 = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad A_3 = \frac{50}{3}.$$

Finalmente, concluímos que

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{50}{3} = \frac{58}{3}.$$

Portanto, a área procurada é $A = \frac{58}{3}$.

Chamo a atenção do leitor para algumas notações alternativas, e mais práticas, para o **TFC-02**. Abaixo seguem duas delas:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = [F(x)]_a^b. \quad (6.17)$$

Nesse caso, ambas as expressões $F(x) \Big|_a^b$ ou $[F(x)]_a^b$ podem ser lidas como a *diferença entre as antiderivadas avaliadas nos limites superior e inferior do intervalo* $[a, b]$.

Exemplo 6.6

Calcule o valor da integral $\int_2^6 x^3 dx$.

Peço atenção especial do leitor para esse problema, pois resolvê-lo-ei de duas maneiras. Primeiro da maneira como resolvemos os exercícios anteriores e uma segunda solução, cuja diferença básica será uma notação mais rápida e prática.

Solução 01

Tomaremos uma antiderivada de $f(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C.$$

Observe que $F'(x) = f(x)$. Assim, temos:

$$\int_2^6 x^3 dx = F(x) \Big|_2^6.$$

Avaliando $F(x)$ nos pontos de interesse, temos:

$$F(6) = \frac{1}{4}6^4 = 324,$$

$$F(2) = \frac{1}{4}2^4 = 4.$$

Dessa maneira, o valor da integral fica:

$$\int_2^6 x^3 dx = F(x) \Big|_2^6 = 324 - 4 = 320.$$

Observe que dessa vez estamos querendo calcular diretamente a integral, não estamos preocupados com área alguma. Assim, não precisamos nos preocupar também com o gráfico da função, embora, nesse caso, ele estivesse inteiramente contido na região superior do plano cartesiano no intervalo considerado.

Solução 02

Naturalmente, a antiderivada deve ser encontrada de qualquer maneira. A diferença será na escrita. Observe:

$$\begin{aligned}\int_2^6 x^3 dx &= \left(\frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_2^6 \\ &= \left(\frac{1}{4} 6^4 \right) - \left(\frac{1}{4} 2^4 \right) \\ &= 324 - 4 \\ &= 320.\end{aligned}$$

Há quem prefira até deixar as constantes pra fora da integral, trabalhando como se segue:

$$\begin{aligned}\int_2^6 x^3 dx &= \left(\frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_2^6 \\ &= \frac{1}{4} (6^4 - 2^4) \\ &= \frac{1}{4} (1296 - 16) \\ &= 320.\end{aligned}$$

Faça da maneira que se sentir mais confortável. A essa altura estamos apenas mostrando diferentes formas de se escrever a mesma coisa e não necessariamente ensinando algo novo.

Exemplo 6.7

Calcule o valor de $\int_{-79}^{79} x^{47} dx$.

O objetivo com esse exemplo não é que o leitor gaste tempo fazendo contas. Na verdade, mesmo que ele se dispusesse a fazê-lo, veria que não existe a necessidade. Você consegue resolver essa de cabeça, de forma imediata?

Observe a função a ser integrada: $f(x) = x^{47}$. Ela é uma **função ímpar**, ou seja:

$$\begin{aligned}f(-x) &= (-x)^{47} \\ &= -x^{47} \\ &= -f(x).\end{aligned}$$

Graficamente, isso significa que essa função é simétrica com relação à origem. Além disso, o segundo fato que deve chamar a atenção do leitor é que o intervalo de integração é simétrico: nesse caso, entre $[-79, 79]$. Assim, unindo essa ideia ao

fato da função $f(x)$ ser ímpar, a área abaixo do eixo x será sempre igual à área acima do eixo x . A Figura 6.13 ilustra essa situação.

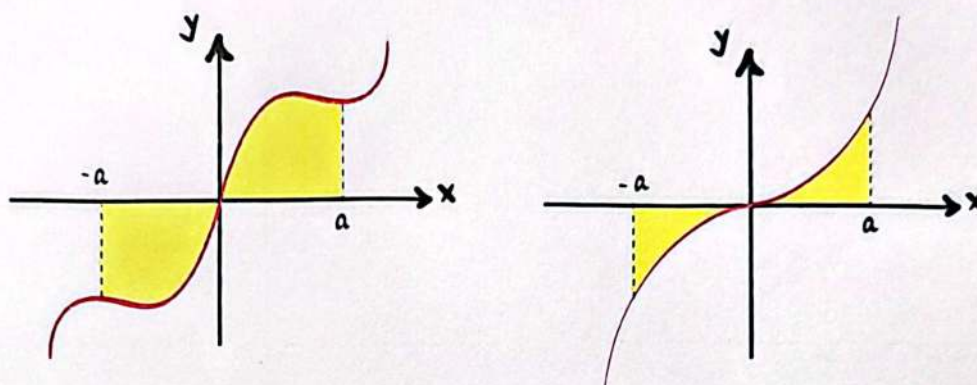


Figura 6.13: Gráficos de funções ímpares genéricas com intervalos simétricos.

Disso, concluímos que a integral no intervalo simétrico será nula: a parte acima do eixo x é anulada pela parte abaixo dele.

Porém, é claro que, para não deixar o leitor chateado, vamos aos cálculos. Primeiramente, dado $f(x) = x^{47}$, uma antiderivada $F(x)$ será dada por:

$$F(x) = \frac{1}{48}x^{48} + C.$$

Avaliando $F(x)$ nos pontos desejados, temos:

$$F(79) = \frac{1}{48} \cdot 79^{48} + C,$$

$$F(-79) = \frac{1}{48} \cdot (-79)^{48} + C = \frac{1}{48} \cdot 79^{48} + C = F(79).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-79}^{79} x^{47} dx &= F(79) - F(-79) \\ &= F(79) - F(79) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 6.8

Faça o esboço da situação e calcule $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$.

O leitor deve conhecer o gráfico da função $f(x) = 1/x$. Trata-se de uma hipérbole

equilátera. Seu gráfico é mostrado na Figura 6.14(a). Já o gráfico da função $f(x) = 1/x^2$ é semelhante, com a ressalva de que está acima do eixo x em todo o domínio, uma vez que $x^2 > 0$ para todo x . A Figura 6.14(b) mostra esse gráfico.

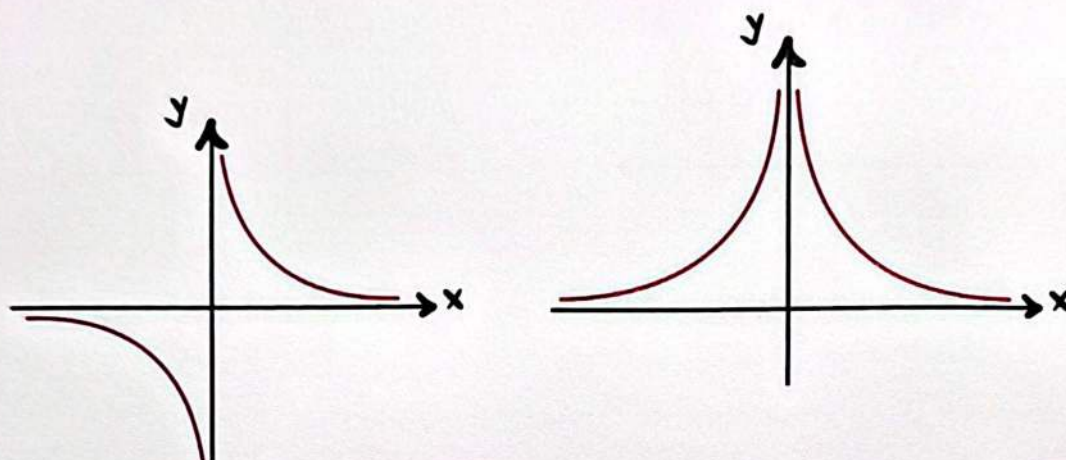


Figura 6.14: Gráfico das funções $f(x) = \frac{1}{x}$ e $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Deseja-se calcular o valor da área compreendida entre $x = -1$ e $x = 1$. Primeiramente, calculando a antiderivada $F(x)$, temos:

$$F(x) = -\frac{1}{x}.$$

Novamente, chamo a atenção do leitor para o fato de que, por ora, não é importante ter um procedimento exato para se obter antiderivadas. Esse será um passo subsequente. É importante, no entanto, que o leitor se certifique, derivando a função $F(x)$, de que $F'(x) = f(x)$.

Assim, temos

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = F(x) \Big|_{-1}^1.$$

Avaliando $F(x)$ nas extremidades, temos:

$$F(1) = -\frac{1}{1} = -1,$$

$$F(-1) = -\frac{1}{-1} = 1.$$

Assim,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = F(1) - F(-1) = -1 - 1 = -2.$$

Você percebe alguma inconsistência?

Primeiramente, a curva da função $f(x)$ se encontra inteiramente na parte superior do eixo x . Dessa maneira, qualquer integral que calculemos deverá ser positiva. No entanto, ao fazer os cálculos, o valor obtido foi igual a -2 , ou seja, negativo, o que jamais poderia ter acontecido.

Embora esses meus argumentos façam algum sentido, eles não estão perfeitamente corretos. Afinal, pode-se ver claramente que a função $f(x) = 1/x^2$ possui uma descontinuidade em $x = 0$. Esse ponto, no entanto, se encontra no intervalo de integração, $[-1, 1]$ e, nele, $f(x) \rightarrow \infty$.

Lembre-se que, ao enunciar o **TFC**, antes de começarmos a resolver os exemplos, destacamos que $f(x)$ precisaria ser contínua, o que deve estar claro agora. Essa função apresenta uma descontinuidade no intervalo em que desejamos efetuar o cálculo. Então, dizemos que essa integral não converge e, portanto, não pode ser calculada.

6.3 Integrais Indefinidas

Na seção anterior, falamos quase que exclusivamente sobre integrais definidas. Elas foram fundamentalmente utilizadas para calcular áreas entre curvas e o eixo x usando o **Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 02**. Para calcular essas integrais definidas, o primeiro passo sempre era encontrar uma antiderivada $F(x)$ da função $f(x)$. Em seguida avaliávamos $F(x)$ nos limites de integração.

O fato é que essas antiderivadas, como vimos repetidas vezes, são utilizadas absolutamente o tempo todo. Até o presente momento, nós convencionamos que a antiderivada da função $f(x)$ seria denotada por $F(x)$. Podemos e vamos continuar utilizando essa convenção, mas isso não é matematicamente suficiente. Precisamos atribuir uma notação específica para a antiderivada de uma função.

Dada a relação existente entre a integral de uma função e a antiderivada dessa função, fica estabelecido que

$$\int f(x) dx = F(x) \quad \Longleftrightarrow \quad F'(x) = f(x). \quad (6.18)$$

Aqui, $\int f(x) dx = F(x)$ é denominada **integral indefinida**.

Por exemplo,

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C,$$

pois

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4}x^4 + C \right) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^3 + 0 = x^3.$$

Observe que essa integral indefinida representa, na verdade, uma família de funções, em que uma se diferencia da outra pela constante C . Ao longo do texto, o leitor

já foi alertado a respeito disso, e a diferença básica entre uma integral definida e uma integral indefinida é:

- **Integral definida:** é um número.
- **Integral indefinida:** é uma família de funções.

Claro, elas estão intimamente relacionadas, mas estabelecer essa diferença é essencial.

Exemplo 6.9

Calcule as integrais:

(a) $\int x^2 dx$.

(b) $\int_3^6 x^2 dx$.

(a) Aqui estamos falando da integral indefinida, ou seja, é uma função (ou família de funções). Assim, temos:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

(b) Já nesse item, estamos falando de uma integral definida, ou seja, de um valor numérico. Esse valor pode ser obtido aplicando o TFC-02, ou seja, avaliando a função obtida no item (a) nas extremidades do intervalo:

$$\begin{aligned} \int_3^6 x^2 dx &= \left(\frac{1}{3}x^3 + C \right) \Big|_3^6 \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot 6^3 + C \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 + C \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot 6^3 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 \right) - (C - C) \\ &= 63. \end{aligned}$$

Observe que, na linha 3 dessa equação, fizemos questão de ressaltar novamente o fato de que a constante C se torna indiferente no cálculo da integral definida, uma vez que ela será sempre subtraída de si mesma.

Por isso, ao computar uma integral definida, não é necessário explicitar a constante, podendo simplificar ligeiramente a escrita como a seguir:

$$\int_3^6 x^2 dx = \left(\frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_3^6 = \left(\frac{1}{3} \cdot 6^3 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 \right) = 72 - 9 = 63.$$

6.4 Ferramentas Básicas para Cálculo de Integrais

6.4.1 Integrais Elementares

Até o presente momento, trabalhamos exclusivamente com funções polinomiais. A razão disso é a simplicidade na obtenção das antiderivadas. No entanto, como também já é de conhecimento do leitor, existem uma infinidade de funções além das polinomiais. Naturalmente, essas funções possuem suas respectivas antiderivadas (ou, como acordamos em falar a partir da última seção, suas respectivas integrais).

O objetivo dessa seção é fazer para o leitor um compilado das principais funções cujas integrais precisam ser conhecidas imediatamente. Se devo ser honesto, é preciso pontuar que essa seção não traz nada que o leitor, em certa medida, já não tenha conhecimento, afinal, o processo de integração é o exato inverso do processo de derivação.

Primeiro, generalizando as integrais de funções polinomiais, temos:

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C.} \quad (6.19)$$

Podemos fazer essa verificação facilmente a seguir:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \right) = \frac{n+1}{n+1} x^n = x^n.$$

Observe que, quando $n = 0$, temos um caso particular da integral de uma constante, que às vezes passa despercebido a olhos desatentos:

$$\boxed{\int 1 dx = \int x^0 dx = \frac{1}{0+1} x^{0+1} + C = x + C.} \quad (6.20)$$

Repare, também, que, quando $n = -1$, ou seja, quando o integrando é a função $f(x) = 1/x$, chegamos em uma indeterminação, pois o denominador ficaria nulo.

$$\int x^{-1} dx = \frac{1}{-1+1} x^{-1+1} + C = \frac{1}{0} + C.$$

Esse caso pode ser tratado da seguinte maneira. Derivando a função logarítmica, temos:

$$\frac{d}{dx} (\log_a(x)) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)} \quad \xrightarrow{a=e} \quad \frac{d}{dx} (\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

Assim, é imediato que

$$\boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.} \quad (6.21)$$

O módulo que surge na Equação (6.21) será discutido posteriormente.

Apesar de a Equação (6.19) ter sido descrita como *polinomial* (o que implicaria $n \in \mathbb{N}$), ela pode ser estendida para qualquer $n \in \mathbb{R}$, salvo as exceções citadas.

Outros casos comuns são, também, as funções trigonométricas básicas. Nesse caso, já sabemos que:

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x).$$

Consequentemente, podemos encontrar as respectivas integrais dessas funções:

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C.$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C.$$

Podemos ainda avançar e encontrar integrais de funções exponenciais. Como é sabido,

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \cdot \ln(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{a^x}{\ln(a)} \right) = a^x.$$

Dessa maneira, é imediato que

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C. \quad (6.22)$$

Uma atenção especial deve ser dada ao caso em que $a = e$, ou seja, a função $f(x) = e^x$. Aplicando $a = e$ na Equação (6.22), temos:

$$\int e^x dx = \frac{e^x}{\ln(e)} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Essas, caro leitor, seriam as integrais consideradas **elementares**. Aquelas que se deve saber imediatamente, sem titubear. Além dessas, existem algumas outras um pouco menos corriqueiras, como as enunciamos a seguir.

$$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x) \quad \Rightarrow \quad \int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C;$$

$$\frac{d}{dx}(\cot(x)) = -\csc^2(x) \quad \Rightarrow \quad \int \csc^2(x) dx = -\cot(x) + C.$$

A Tabela 6.4 resume todas essas principais integrais.

Vale ressaltar um terceiro grupo, ainda menos usual, mas que eventualmente pode ser necessário lançar mão de suas integrais. Estas se encontram na Tabela 6.5.

Função	Integral
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
1	$x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
e^x	$e^x + C$
$\sec^2(x)$	$\tan(x) + C$
$\csc^2(x)$	$-\cot(x) + C$

Tabela 6.4: Integrais das principais funções elementares.

Algum leitor mais apressado — e que Deus o guarde em sua sede de saber — talvez já se inquieta, perguntando-se como há de proceder quando a função diante de si não se curva às formas que até aqui desfilamos. Tenha calma, meu caro; nada de anseios. O Cálculo, como a vida, tem seus degraus, e subir todos de uma vez é convite à vertigem. As integrais de outras espécies, mais rebeldes ou compostas, também se deixam conquistar — mas pedem tempo, tato e paciência — e disso trataremos, como é de justiça, nos capítulos que se seguem.

Função	Integral	Função	Integral
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot}(x) + C$
$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcsec}(x) + C$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccsc}(x) + C$

Tabela 6.5: Integrais levando a funções trigonométricas inversas.

Para concluir o estudo básico sobre integrais, resta-nos apenas enunciar duas propriedades, as quais são bastante intuitivas e, de certo modo, já são do conhecimento do leitor.

6.4.2 Propriedades Básicas da Integração

No Capítulo 3 foi apresentado um estudo completo sobre limites, em que enunciamos e demonstramos algumas de suas propriedades. Duas das quais são:

- Multiplicação por constante

$$\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ em que } k \in \mathbb{R}.$$

- Linearidade

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Por outro lado, como mostramos, uma integral nada mais é do que um limite. Uma integral é o **limite da Soma de Riemann**. Dessa maneira, é consequência imediata que todas as propriedades dos limites sejam válidas para as integrais. Contudo, mostraremos essas propriedades novamente, agora usando a linguagem do Teorema Fundamental do Cálculo.

O fato é que quando estamos calculando integrais, dificilmente uma função elementar aparece sozinha. Na maioria das vezes o que acontece é:

1. A função vem multiplicada por uma constante.

Exemplo:

$$\int 2x^3 dx ; \int 4 \sin(x) dx ; \int \frac{e^x}{7} dx.$$

2. Aparece uma soma (ou subtração) de funções.

Exemplo:

$$\int (x^3 + x^2) dx ; \int (\sin(x) - e^x) dx ; \int \left(\frac{1}{x} + \sec^2(x) \right) dx.$$

3. Uma combinação das situações 1 e 2.

Exemplo:

$$\int (7x^4 - 2x^2) dx ; \int (-5 \sin(x) + 6e^x) dx ; \int \left(\frac{4}{x} + 3 \cos(x) \right) dx.$$

Convém estar pronto para lidar com esse tipo de situação. Assim, seguem as duas propriedades que mencionamos, e que iremos utilizar incansavelmente. Com pouco tempo, o leitor já estará utilizando-as com muita naturalidade.

Propriedade 01 - Função multiplicada por uma constante

$$\boxed{\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.}$$

Demonstração

Seja $F(x)$ uma antiderivada de $f(x)$, ou seja, $F'(x) = f(x)$. Então, temos:

$$\frac{d}{dx}[k \cdot F(x)] = k \cdot \frac{d}{dx}[F(x)] = k \cdot f(x),$$

ou seja, $k \cdot F(x)$ é antiderivada de $k \cdot f(x)$. Assim, podemos aplicar:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot F(b) - k \cdot F(a) = k[F(b) - F(a)] = k \int_a^b f(x) dx.$$

Se fosse preciso escrever essa propriedade de uma maneira informal, no bom português, minha recomendação para o leitor é que ignore a constante durante o processo de integração e a devolva novamente no fim. ■

Propriedade 02 - Soma e Subtração de Funções

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx &= [F(b) \pm G(b)] - [F(a) \pm G(a)] \\ &= [F(b) - F(a)] \pm [G(b) - G(a)] \\ &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Essa propriedade basicamente diz que, quando há uma soma de funções, elas podem ser tratadas de maneira independente durante o processo de integração: a integral da soma é a soma das integrais. ■

Exemplo 6.10

Calcule a integral da função $f(x) = 8x^3 - 3 \cos x + \frac{5}{2}e^x$.

Calculando a integral da função desejada, temos:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(8x^3 - 3 \cos x + \frac{5}{2}e^x \right) dx && \text{(pela Propriedade 02)} \\ &= \int (8x^3) dx + \int (-3 \cos x) dx + \int \left(\frac{5}{2}e^x \right) dx && \text{(pela Propriedade 01)} \\ &= 8 \int x^3 dx - 3 \int \cos x dx + \frac{5}{2} \int e^x dx. \end{aligned}$$

Observe que, nesse momento, após a aplicação das propriedades, apenas integrais

elementares estão presentes nos integrandos. Ou seja, agora é mera formalidade:

$$\begin{aligned}\int f(x) \, dx &= 8 \int x^3 \, dx - 3 \int \cos x \, dx + \frac{5}{2} \int e^x \, dx \\ &= 8 \cdot \frac{1}{4} x^4 - 3 \cdot \sin x + \frac{5}{2} e^x + C \\ &= 2x^4 - 3 \cdot \sin x + \frac{5}{2} e^x + C.\end{aligned}$$

Um questionamento que pode surgir por parte do leitor é que, quando usamos a **Propriedade 02**, dividimos a integral original em três integrais indefinidas. Assim, em teoria, cada uma delas geraria uma constante durante o processo de integração (a dizer C_1 , C_2 e C_3) e não apenas uma (C), como foi colocado. No entanto, vale ressaltar que a soma de constantes é também uma constante, ou seja, $C_1 + C_2 + C_3 = C$. Assim, independentemente de quantos termos seja possível dividir a integral, no fim do processo de integração, adicionaremos apenas uma constante de integração.

Exemplo 6.11

Calcule $\int (7x^3 + 5x^2 - 2x + 1) \, dx$.

Vamos separar os termos da integral e resolver cada um deles separadamente. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\int (7x^3 + 5x^2 - 2x + 1) \, dx &= \int 7x^3 \, dx + \int 5x^2 \, dx - \int 2x \, dx + \int 1 \, dx \\ &= 7 \int x^3 \, dx + 5 \int x^2 \, dx - 2 \int x \, dx + \int 1 \, dx \\ &= 7 \left(\frac{x^4}{4} \right) + 5 \left(\frac{x^3}{3} \right) - 2 \left(\frac{x^2}{2} \right) + x + C \\ &= \frac{7}{4} x^4 + \frac{5}{3} x^3 - x^2 + x + C.\end{aligned}$$

Exemplo 6.12

Calcule $\int_2^3 \frac{6}{x^2} \, dx$.

Neste caso, aplicamos a regra de potências de x , como segue:

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{6}{x^2} dx &= 6 \int_2^3 x^{-2} dx = 6 \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) \Big|_2^3 = -6 \left(\frac{1}{x} \right) \Big|_2^3 \\ &= -6 \left(\left(\frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) \right) = -6 \left(-\frac{1}{6} \right) = 1.\end{aligned}$$

Exemplo 6.13

Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \cos(x) dx$.

Resolvendo a integral, temos:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \cos(x) dx &= 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 5 \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 5 \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right) = 5(1 - 0) = 5.\end{aligned}$$

Exemplo 6.14

Calcule $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x} dx$.

Esse problema nos permite avançar na discussão que foi mencionada na Equação (6.21). Sabemos que $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$, então, por que

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad \text{e não} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C?$$

A resposta está no domínio da função. A Figura 6.15 mostra, da direita para a esquerda, o gráfico das funções $f(x) = 1/x$ e $f(x) = \ln(x)$, respectivamente.

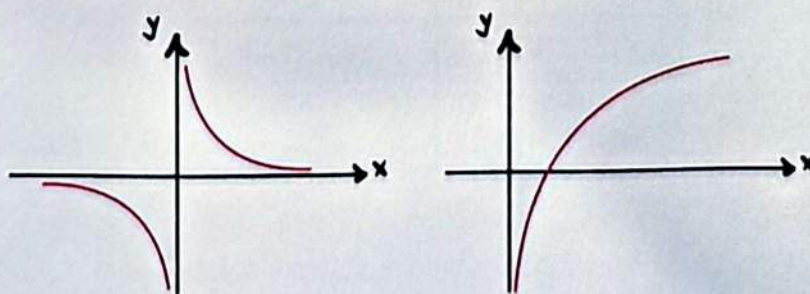


Figura 6.15: Gráfico das funções $f(x) = 1/x$ e $f(x) = \ln(x)$.

O domínio da função $f(x) = 1/x$ é $\mathbb{R}^*$ enquanto o domínio de $f(x) = \ln(x)$ é $\mathbb{R}_+^*$. Quando trabalhamos com a função $\ln(x)$, já é pressuposto que $x > 0$, portanto não há preocupação. No entanto, quando a situação é a contrária, ou seja, quando estamos trabalhando com a função $1/x$, x pode ser negativo. Então, como procederíamos nessa situação? Observe, por exemplo, que, sem a aplicação do módulo, a integral do problema ficaria:

$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_{-3}^{-2} = \ln(-2) - \ln(-3).$$

Entretanto, sabemos que $\ln(-2)$ e $\ln(-3)$ não existem. Isso poderia levar à errônea conclusão de que a integral não existe. No entanto, olhando sob outra perspectiva, sabemos que o problema tem solução, uma vez que ele pode ser traduzido por calcular a área mostrada na Figura 6.16.

O fato é que a derivada de $f(x) = \ln(x)$ realmente é $f'(x) = 1/x$. No entanto, a derivada da função $f(x) = \ln|x|$ também é $f'(x) = 1/x$ e, por se tratar de uma função mais ampla, cujo domínio é $\mathbb{R}^*$, devemos considerá-la como a integral de $1/x$.

$$f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln(x), & \text{se } x \geq 0, \\ \ln(-x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Derivando as funções confirmamos isso:

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \begin{cases} \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}, & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

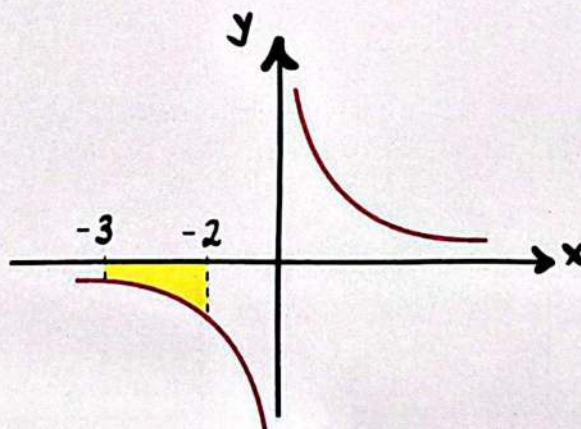


Figura 6.16: Área a ser calculada.

A essa altura deve estar claro para o leitor o motivo do módulo entrar no logaritmo ao integrarmos a função $1/x$, de modo que o nosso problema em questão se torna

trivial:

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x} dx &= \ln|x| \Big|_{-3}^{-2} = \ln|-2| - \ln|-3| \\ &= \ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0,4055.\end{aligned}$$

Note que a integral é negativa, como deveríamos esperar, posto que trata-se de uma área abaixo do eixo x , cujos retângulos de largura infinitesimal possuem alturas $f(x)$ negativas, como já discutimos noutra ocasião.

6.5 Modelagem de Integrais – Uma Introdução

Ter habilidade para resolver integrais tem grande importância, motivo pelo qual investimos algumas seções desse capítulo falando sobre resolução de integrais e passaremos o capítulo seguinte fazendo exclusivamente isso. **No entanto, não podemos esquecer o coração do Cálculo Integral.** O autor que vos escreve gosta de pensar no Cálculo Integral como duas partes complementares:

Modelagem: Essa etapa consiste em analisar o problema e ser capaz de formular a integral que o traduz. Essa é a etapa à qual nos referimos pelo “coração do Cálculo Integral”. Nessa etapa, não estamos preocupados em *resolver* a integral. Estamos focados em conseguir *formular e construir* a integral.

Resolução da Integral: Essa etapa consiste em, literalmente, ser capaz de resolver a integral obtida na *Modelagem*. Essa é uma etapa algumas vezes mais mecânica, que vai exigir mais habilidades técnicas e ferramentais do estudante.

Portanto, essa breve seção tem o simples (no entanto, importante) intuito de fazer o leitor parar um pouco e reavaliar tudo que fizemos até agora e, especialmente, lembrá-lo do “coração do Cálculo Integral”. É comum que o estudante fique focado na etapa de **Resolução de Integrais**, o que é importante e, também, bastante fascinante, mas o problema é que esses estudantes muitas vezes se perdem completamente e começam apenas a resolver integrais, aprender técnicas para resolver os mais variados tipos de integrais, esquecendo-se o que está sendo de fato calculado e como isso funciona. Eles viram “resolvedores de integrais” e perdem de vista a essência do Cálculo Integral, que é, sem dúvida, a parte mais importante, uma vez que qualquer software ou inteligência artificial certamente conseguirá resolver integrais com muito mais agilidade do que o leitor. Nesse sentido, focar apenas na parte instrumental — a resolução de integrais —, deixando de lado o entendimento e o significado dos cálculos (que é o que possibilitaria alguém montar um desses programas para computar integrais) faz com que todo o processo de aprendizado perca o sentido.

O Capítulo 7 desse livro será focado em diversas técnicas para resolver integrais. Contudo, como um remédio para que o leitor não se torne apenas uma máquina de resolver integrais, o Capítulo 8 será dedicado exclusivamente a mostrar diversas

aplicações de integrais. Nele, focaremos não só em resolver integrais, mas também em formulá-las. Para isso, será muito importante estar bastante afiado na manipulação de integrais usando uma poderosa linguagem já discutida anteriormente: a **notação de Leibniz**.

6.5.1 Notação de Leibniz na Integração

A Seção 4.1.1 trabalha especificamente sobre esse assunto, assim como a Seção 4.5 foi dedicada a tratar o diferencial. A breve subseção atual tem por objetivo mostrar como essa notação irá nos ajudar na modelagem do Cálculo Integral. Saber relacionar taxas de variações assim como relacionar diferenciais desempenha um papel crucial na modelagem de integrais e a notação de Leibniz é muito útil nessas situações. Para melhor entender essa ideia, vamos a um exemplo bastante simples.

Cálculo da área de um círculo de raio R .

Vamos assumir que conhecemos apenas o comprimento C da circunferência de raio R que é dada por:

$$C = 2\pi R.$$

A essência da interpretação desse problema é entender que um círculo é a união de infinitas circunferências com raio aumentando pouco a pouco, conforme a Figura 6.17.

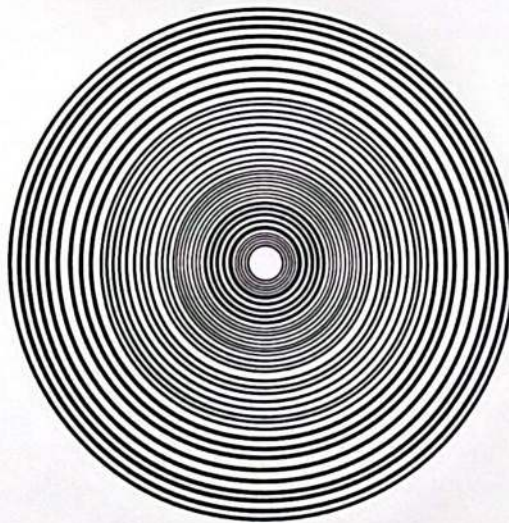


Figura 6.17: Círculo formado por infinitas circunferências.

A pergunta cuja resposta é o cerne da explanação é: **“O quanto varia a área à medida que o raio varia?”** ou, de maneira mais prática: **“Qual a relação entre a taxa de variação da área em função da variação do raio?”**.

Para responder essa pergunta, vamos observar a Figura 6.18. Nela está representado um círculo de raio definido R . Ressalto que r não é uma constante, e sim uma variável. Ela representa a distância até o centro de um “anel”. Esse anel consiste

em uma área infinitesimal dA , referente a uma variação de um infinitésimo do raio dr . Ou seja, esse valor de dA indica o quanto a área do círculo de raio r varia ao aumentar o raio de um infinitésimo dr .

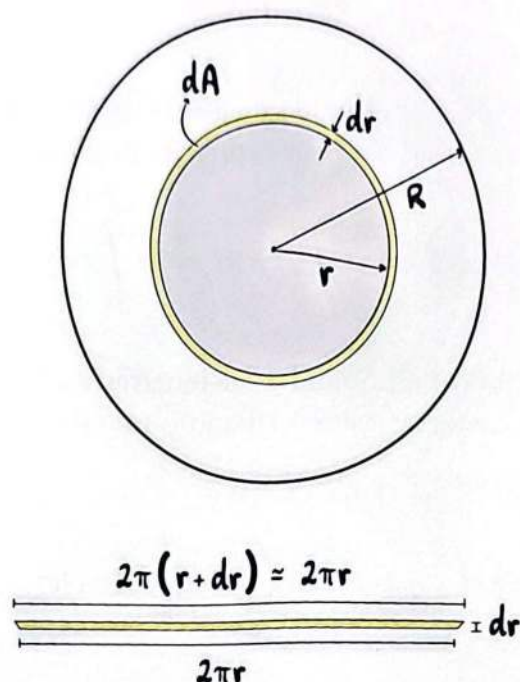


Figura 6.18: Relação entre os diferenciais dA e dr .

Então, temos o seguinte problema: relacionar essas duas taxas de variação ou, de outra maneira, relacionar os diferenciais dA e dr . É aqui que a notação de Leibniz desempenha um papel muito importante e facilita muito a organização das ideias.

Primeiramente, observe que, como $dr \ll r$, podemos enxergar o elemento infinitesimal de área dA como um trapézio isósceles cujas bases, em teoria, seriam $2\pi r$ e $2\pi(r+dr)$ e com altura dr . Como $dr \ll r$, podemos assumir que $2\pi r \approx 2\pi(r+dr)$. Ou seja, é um retângulo de base $2\pi r$ e altura dr . Dessa maneira, podemos escrever:

$$dA = 2\pi r \, dr. \quad (6.23)$$

Por outro lado, podemos fazer uma interpretação mais direta do ponto de vista de variação. Ao aumentar o raio do círculo de r para $r+dr$, a área aumenta exatamente uma circunferência. Seria uma área tão fina que podemos interpretar como uma circunferência. Equacionando essa frase, teríamos:

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r. \quad (6.24)$$

Observe que as Equações (6.23) e (6.24) representam exatamente a mesma ideia. Por um lado, pode ser interpretada como a taxa de variação da área em função da variação do raio e, por outro lado, ela relaciona o diferencial da área dA com o diferencial do raio dr .

Voltando agora ao propósito inicial que é calcular a área do círculo, podemos enxergar o círculo como a soma de infinitésimos de área dA , ou seja,

$$A = \int dA.$$

Porém, observe que o nosso objetivo é calcular a área A em função do raio R . Assim, substituindo o diferencial dA pela expressão da Equação (6.23), temos

$$A = \int dA = \int 2\pi r \, dr = 2\pi \int r \, dr.$$

Nos resta agora apenas definir os limites de integração. Como estamos integrando com relação ao raio e para varrer todo o círculo o raio deve variar de 0 a R , então, finalmente, temos:

$$A = 2\pi \int_0^R r \, dr = 2\pi \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_0^R = \pi (R^2 - 0^2)$$

$$\boxed{A = \pi R^2.}$$

Naturalmente, essa já é uma expressão conhecida do leitor. O objetivo aqui, contudo, era evidenciar a importância da capacidade de se modelar uma situação usando o Cálculo Integral. Note que a parte mais importante do problema foi a construção geométrica, a interpretação e a capacidade de construir a Equação (6.23). O restante consistiu apenas em computar uma integral elementar, o que não incorre em dificuldade alguma. Nesse sentido, todo o raciocínio que fizemos para montar a integral é o batizamos ser o processo de Modelagem, que trabalharemos bastante no Capítulo 8. Daí em diante, o processo consiste apenas em computar uma integral — o que pode ser mais fácil ou mais difícil a depender do problema, mas tal tarefa será certamente impossível caso o leitor sequer tenha conseguido montar a integral a ser resolvida.

O exemplo seguinte trabalha essa ideia de maneira mais profunda assim como relaciona um número maior de diferenciais.

Exemplo 6.15

Considere a situação descrita na Figura 6.19. Nela estão um aro circular fino carregado com uma carga positiva Q uniformemente distribuída e uma partícula pontual carregada com uma carga q , também positiva. Essa carga pontual está posicionada simetricamente em relação ao aro, de modo que a vertical que passa por ela contenha o centro do aro.

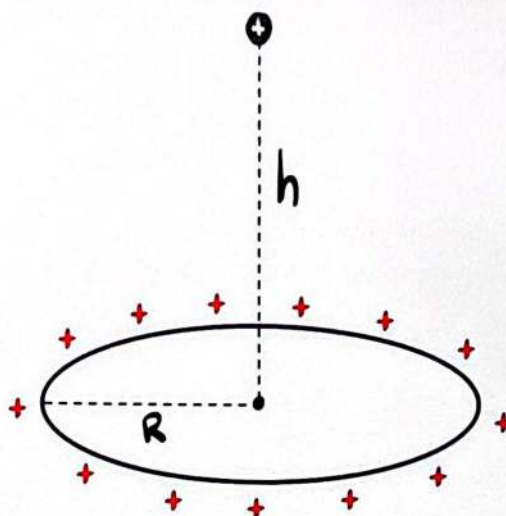


Figura 6.19: Aro fino com carga uniforme Q e partícula com carga q posicionada simetricamente.

A distância entre a carga pontual e o plano do aro é h e o raio do aro é R . Determine a força que o aro exerce sobre a carga pontual.

Observação: A **Lei de Coulomb** estabelece que, dadas duas partículas pontuais (de dimensões desprezíveis) carregadas com cargas q_1 e q_2 posicionadas de modo que a distância entre elas seja d , a força que uma exerce sobre a outra é dada pela Equação (6.25):

$$F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (6.25)$$

onde k_e é denominada *constante de Coulomb*, cujo valor no vácuo é

$$k_e \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}.$$

O primeiro passo para a solução desse problema é observar que a geometria apresenta uma simetria axial. Portanto, é notável que não haverá componente horizontal na força resultante. Dessa maneira, podemos nos preocupar apenas com a componente vertical de força, F_y .

Como já comentamos, o primeiro passo para a resolução do problema é a **Modelagem**. Ou seja, precisamos conseguir traduzir esse problema para a linguagem matemática. Porém, como faremos isso? Ora, a Fórmula (6.25) computa a força entre duas cargas de dimensões desprezíveis, ou seja, no nosso contexto, cargas infinitesimais. Como o leitor tem à sua disposição as integrais, temos a faca e o queijo na mão: quebraremos o anel em infinitas cargas infinitesimais, computaremos a força de interação entre cada pequena partícula dessas e a carga q e depois somaremos todas essas forças por meio da integração.

A carga total do aro é Q . O comprimento desse aro de raio R será denotado por L e seu valor é $L = 2\pi R$. Podemos definir com isso a densidade linear de carga λ , dividindo a carga inteira ao longo de seu comprimento:

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2\pi R}.$$

Façamos agora uso da ideia de dividir o aro em infinitas partes como se ele fosse constituído por infinitas partículas, conforme a Figura 6.20:

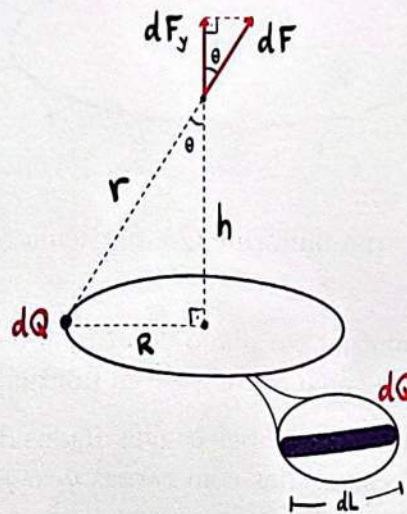


Figura 6.20: Representação da força exercida por um infinitésimo do arco.

Cada partícula dessas teria uma carga infinitesimal dQ e teria, também, comprimento dL . Como o aro está carregado uniformemente, é válida a relação:

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{dQ}{dL} \quad \Rightarrow \quad \boxed{dQ = \lambda dL.}$$

Pela Lei de Coulomb, a força que essa partícula infinitesimal exerce sobre a partícula é dada por:

$$dF = k_e \cdot \frac{q \cdot dQ}{r^2},$$

onde r é a distância entre as cargas. Veja que a força foi denotada por dF , pois se trata da força exercida por uma carga infinitesimal. Além disso, definamos o ângulo entre a direção da força e a vertical como θ . Assim, pela figura é fácil ver que

$$\cos(\theta) = \frac{h}{r},$$

e, ademais, como comentado no início, iremos nos preocupar apenas com a componente vertical. Essa componente é dada por:

$$\begin{aligned} dF_y &= dF \cos(\theta) = k_e \cdot \frac{q \cdot dQ}{r^2} \cos(\theta) \\ &= k_e \cdot \frac{q \cdot dQ}{r^2} \frac{h}{r} = \frac{k_e \cdot q \cdot h}{r^3} dQ. \end{aligned}$$

Substituindo $dQ = \lambda dL$, temos:

$$dF_y = \frac{k_e \cdot q \cdot h}{r^3} \cdot \lambda dL.$$

Essa equação mostra a força exercida por cada infinitesimal dL do arco. Para obter a força total, basta **somar** as forças exercidas por cada infinitesimal e é nesse momento que aplicamos a ideia da **integral**, de modo que a força total será dada por:

$$F_y = \int dF_y = \int \frac{k_e \cdot q \cdot h \cdot \lambda}{r^3} dL.$$

Observe que os valores de k_e , q , λ , h e r são constantes e, conseqüentemente, podem sair da integral, ficando

$$F_y = \frac{k_e \cdot q \cdot h \cdot \lambda}{r^3} \int dL.$$

Por fim, basta definir os limites de integração. Observe que o elemento infinitesimal é o arco dL e temos um arco completo, ou seja, $L = 2\pi R$, de modo que para varrer todo o arco precisamos ir de $L = 0$ até $L = 2\pi R$:

$$F_y = \int dF_y = \frac{k_e \cdot q \cdot h \cdot \lambda}{r^3} \int_0^{2\pi R} dL.$$

Bom, aqui finalizamos a parte que denominamos **Modelagem**. Etapa que, como já mencionado, é provavelmente a mais importante de todas e, muitas vezes, mais desafiadora. Agora a integral já está pronta e resta apenas resolvê-la. Vejamos como fazer:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi R} dL &= \int_0^{2\pi R} 1 dL \\ &= L \Big|_0^{2\pi R} \\ &= (2\pi R) - (0) \\ &= 2\pi R. \end{aligned}$$

Observe que essa foi a etapa mais simples do problema. Podemos agora escrever a expressão para a força:

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{k_e \cdot q \cdot h \cdot \lambda}{r^3} \int_0^{2\pi R} dL \\ &= \frac{2\pi R \cdot k_e \cdot q \cdot h \cdot \lambda}{r^3}. \end{aligned}$$

Como qualquer problema de Matemática, é importante escrevermos a resposta em termos dos parâmetros fornecidos. Lembre-se de que definimos $\lambda = Q/2\pi R$ e, além disso, pelo Teorema de Pitágoras, $r = \sqrt{R^2 + h^2}$. Substituindo, temos:

$$F_y = \frac{k_e \cdot h \cdot Q \cdot q}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

6.6 Problemas

Seção 6.1 – Ideia Básica do Cálculo Integral

Problema 6.1 (*Função polinomial*). Calcule a área debaixo da curva $f(x) = x^3$ entre $x = 0$ e $x = 2$ com:

- a) $n = 2$ intervalos.
- b) $n = 4$ intervalos.
- c) $n = 10$ intervalos.

Seção 6.2 – Teorema Fundamental do Cálculo

Problema 6.2 (*Cálculo de antiderivadas*). Encontre uma antiderivada para cada função abaixo:

- a) $f(x) = 6x^2$.
- b) $f(x) = 4x^3 - 2x + 5$.

Problema 6.3 (*Área sob uma função linear*). Calcule a área abaixo da curva da função $f(x) = 4x + 1$ no intervalo $[1, 4]$.

Problema 6.4 (*Área entre a parábola e o eixo x*). Seja a função $f(x) = -x^2 + 4$. Calcule:

- a) A área entre a curva e o eixo x , considerando apenas o trecho em que $f(x) \geq 0$.
- b) A área total entre a curva e o eixo x , no intervalo $[-3, 3]$.

Problema 6.5 (*Intervalo simétrico – função ímpar*). Calcule o valor da integral

$$\int_{-19}^{19} (x^5 + 4x^3 - 2x) dx.$$

Problema 6.6 (*Função com descontinuidade*). Calcule o valor da integral

$$\int_2^5 \frac{1}{x-3} dx.$$

Seções 6.3 e 6.4 – Ferramentas Básicas para Cálculo de Integrais

Problema 6.7 (*Função trigonométrica*). Calcule

$$\int_0^{\pi} 3 \sin(x) dx.$$

Problema 6.8 (*Função logarítmica*). Calcule

$$\int_1^e \frac{4}{x} dx.$$

Problema 6.9 (*Função polinomial*). Calcule

$$\int (5x^2 + 3x - 4) dx.$$

Problema 6.10 (*Função polinomial e trigonométrica*). Calcule

$$\int (5x^3 + 2 \cos(x)) dx.$$

Problema 6.11 (*Função polinomial e exponencial*). Calcule

$$\int (3x^2 + 4e^x) dx.$$

Seção 6.5 – Modelagem de Integrais - Uma Introdução

Problema 6.12 (*Aro semicircular com carga no centro*). Considere um aro semicircular de raio R carregado uniformemente com uma carga Q . No centro desse arco, encontra-se uma partícula carregada com uma carga q . A constante dielétrica é k_e . Determine a força exercida pelo aro sobre a partícula.

6.7 Exercícios

Seção 6.1 – Ideia Básica do Cálculo Integral

Exercício 6.13 (*Função polinomial*). Calcule a área abaixo da curva $f(x) = x^4$ entre $x = 0$ e $x = 1$ com:

- a) $n = 2$ intervalos.
- b) $n = 4$ intervalos.
- c) $n = 6$ intervalos.

Seção 6.2 – Teorema Fundamental do Cálculo

Exercício 6.14 (*Cálculo de antiderivadas*). Determine as antiderivadas das funções a seguir:

- a) $f(x) = 3 \sin x$.
- b) $g(x) = 4e^x$.

Exercício 6.15 (*Área sob uma função linear*). Calcule a área abaixo da curva da função $f(x) = 6x + 3$ no intervalo $[2, 5]$.

Exercício 6.16 (*Área entre eixo x e função quadrática*). Calcule a área entre a curva da função $f(x) = 6x^2 + 2x$ e o eixo x no intervalo $[1, 4]$.

Exercício 6.17 (*Intervalo simétrico – função ímpar*). Calcule o valor da integral

$$\int_{-34}^{34} (x^7 - 2x^5 + 6x) dx.$$

Exercício 6.18 (*Descontinuidade*). Calcule o valor da integral

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 - 4} dx.$$

Seções 6.3 e 6.4 – Ferramentas Básicas para Cálculo de Integrais

Exercício 6.19 (*Funções trigonométricas*). Calcule a integral definida:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (4 \sin(x) + 3 \cos(x)) dx.$$

Exercício 6.20 (*Função polinomial*). Calcule a integral indefinida

$$\int (6x^3 - 2x^2 + 8) dx.$$

Exercício 6.21 (*Função polinomial e algébrica*). Calcule a integral indefinida

$$\int \left(4x^4 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^3} \right) dx.$$

Exercício 6.22 (*Função Exponencial e Trigonométrica*). Calcule a integral indefinida

$$\int (5 \cos x - 3e^x) dx.$$

Seção 6.5 – Modelagem de integrais - Uma introdução

Exercício 6.23 (*Fio infinito*). Considere um fio reto infinito carregado com uma carga uniforme Q e uma carga pontual com carga q . A distância entre o fio e a carga é D . Qual a intensidade da força exercida pelo fio sobre a carga pontual?

6.8 Resoluções dos Problemas

Seção 6.1 – Ideia Básica do Cálculo Integral

Problema 6.1

De maneira genérica, dividindo o intervalo $[a, b] = [0, 2]$ em n subintervalos, cada um terá comprimento Δx dado por:

$$\Delta x = \frac{2 - 0}{n} = \frac{2}{n}.$$

Como foi escolhido o limite superior de cada intervalo para avaliação de $f(x)$, os respectivos valores serão dados por:

$$\left(\frac{2}{n}\right)^3, \left(\frac{4}{n}\right)^3, \left(\frac{6}{n}\right)^3, \dots, \left(\frac{2n}{n}\right)^3.$$

Assim, podemos aproximar o valor da área A_n , quando o intervalo é dividido em n subintervalos, por:

$$A_n = \frac{2}{n} \left(\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \left(\frac{4}{n}\right)^3 + \left(\frac{6}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2n}{n}\right)^3 \right)$$

(a) Dividindo em $n = 2$ subintervalos:

$$A_2 = \frac{2}{2} \left(\left(\frac{2}{2}\right)^3 + \left(\frac{4}{2}\right)^3 \right) = 9.$$

(b) Dividindo em $n = 4$ subintervalos, temos:

$$A_4 = \frac{2}{4} \left(\left(\frac{2}{4}\right)^3 + \left(\frac{4}{4}\right)^3 + \left(\frac{6}{4}\right)^3 + \left(\frac{8}{4}\right)^3 \right) = 6,25.$$

(c) Para $n = 10$, o cálculo é mais preciso e aparece na tabela abaixo.

n	A _n
2	9,0000
4	6,2500
10	4,8400
20	4,4100
50	4,1616
100	4,0804
1.000	4,0080
10.000	4,0008

Tabela 6.6: Valores da área para diversas quantidades de retângulos.

Portanto, a área A sob a curva entre $x = -2$ e $x = 2$ é:

$$A = \frac{32}{3} \approx 10,67.$$

(b) Agora vamos calcular a área total entre a curva e o eixo x no intervalo $[-3, 3]$, incluindo as partes onde $f(x) < 0$.

Uma antiderivada continua sendo $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x$, então:

No intervalo de $x = -3$ a $x = -2$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-3}^{-2} (-x^2 + 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-3}^{-2} \\ &= \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 4(-2) \right) - \left(-\frac{(-3)^3}{3} + 4(-3) \right) \\ &= \left(\frac{-16}{3} \right) - (-3) = -\frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Observe que, como esperado, o valor da área foi negativo. Isso aconteceu pois, estamos trabalhando com uma região abaixo do eixo x . Essa área, portanto, é $A_1 = 7/3$.

No intervalo de $x = 2$ a $x = 3$:

Fique à vontade para executar as contas e fazer uma verificação, no entanto, isso é totalmente desnecessário dada a simetria do gráfico. Assim, essa área será, também, igual a $A_2 = 7/3$.

A região central, de $x = -2$ a $x = 2$, já foi calculada:

$$A_3 = \frac{32}{3}.$$

Logo, a área total é

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{7}{3} + \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = \frac{46}{3} \approx 15,33.$$

Problema 6.5

Nota-se que a função em questão é uma função ímpar, ou seja, $f(-x) = -f(x)$. Podemos mostrar isso facilmente:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + 4(-x)^3 - 2(-x) \\ &= -x^5 - 4x^3 + 2x \\ &= -(x^5 + 4x^3 - 2x) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Isso tem grande importância, pois sabemos que essa função é simétrica em relação à origem. Dessa maneira, em intervalos simétricos, como é o caso de $x \in [-19, 19]$, a

área abaixo do eixo x é igual à área acima do eixo x . Isso faz com que a integral seja nula, ou seja,

$$\int_{-19}^{19} (x^5 + 4x^3 - 2x) dx = 0.$$

Problema 6.6

Nota-se facilmente uma descontinuidade na função $f(x) = \frac{1}{x-3}$ em $x = 3$, uma vez que, nesse caso, o denominador se iguala a zero.

Como o intervalo de integração, $[2, 5]$ compreende esse valor, a função $f(x)$ não é contínua em todo o intervalo. Portanto, essa integral não pode ser calculada.

Seções 6.3 e 6.4 – Ferramentas Básicas para Cálculo de Integrais

Problema 6.7

Resolvendo a integral, tem-se:

$$\begin{aligned} \int 3 \sin(x) dx &= 3 \int_0^{\pi} \sin(x) dx = 3(-\cos(x)) \Big|_0^{\pi} = -3 \cos(x) \Big|_0^{\pi} \\ &= -3(\cos(\pi) - \cos(0)) = -3(-1 - 1) = 6. \end{aligned}$$

Problema 6.8

Para esse caso, temos:

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{4}{x} dx &= 4 \int_1^e \frac{1}{x} dx = 4(\ln(x)) \Big|_1^e \\ &= 4(\ln(e) - \ln(1)) = 4(1 - 0) = 4. \end{aligned}$$

Problema 6.9

Vamos dividir a integral em três partes e resolver cada uma separadamente. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \int (5x^2 + 3x - 4) dx &= \int 5x^2 dx + \int 3x dx - \int 4 dx \\ &= 5 \int x^2 dx + 3 \int x dx - 4 \int 1 dx \\ &= 5 \left(\frac{x^3}{3} \right) + 3 \left(\frac{x^2}{2} \right) - 4x + C \\ &= \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + C. \end{aligned}$$

Problema 6.10

Vamos dividir a integral em duas partes. A primeira é uma integral polinomial e a segunda é trigonométrica. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\int (5x^3 + 2 \cos(x)) dx &= \int 5x^3 dx + \int 2 \cos(x) dx \\ &= 5 \int x^3 dx + 2 \int \cos(x) dx \\ &= 5 \left(\frac{x^4}{4} \right) + 2 \sin(x) + C \\ &= \frac{5}{4} x^4 + 2 \sin(x) + C.\end{aligned}$$

Problema 6.11

Aqui temos a soma de um polinômio e uma exponencial. Vamos resolver cada uma separadamente:

$$\begin{aligned}\int (3x^2 + 4e^x) dx &= \int 3x^2 dx + \int 4e^x dx \\ &= 3 \int x^2 dx + 4 \int e^x dx \\ &= 3 \left(\frac{x^3}{3} \right) + 4e^x + C \\ &= x^3 + 4e^x + C.\end{aligned}$$

Seção 6.5 – Modelagem de Integraís - Uma Introdução

Problema 6.12

A Figura 6.21 descreve a situação. Observe que é um problema que pode ser modelado de forma semelhante ao Exemplo 6.15, contudo, com uma diferença fundamental. Aqui existe, também, uma simetria e já sabemos de antemão qual será a direção da força resultante. Do jeito que o desenho está posicionado, essa força será

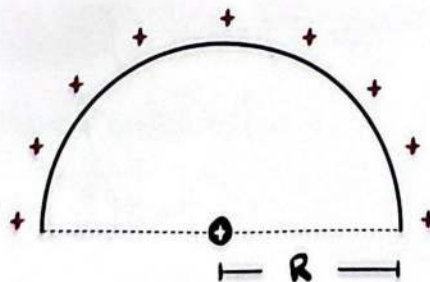


Figura 6.21: Aro semicircular com carga Q e partícula pontual com carga q centrada.

vertical para baixo, uma vez que partículas simétricas em relação ao diâmetro vertical terão componentes horizontais opostas e irão se cancelar.

No entanto, a diferença fundamental entre esse problema e o do exemplo mencionado é que lá a componente da força na direção da força resultante de qualquer elemento infinitesimal era igual. A dizer $dF_y = dF \cos(\theta)$. Observe que, pela geometria do problema, $\cos(\theta)$ era **constante** independentemente da posição do elemento infinitesimal escolhido. Em outras palavras, era um problema de simetria axial.

No problema atual, a situação é diferente. A componente na direção da força resultante é $dF_y = dF \sin(\theta)$, mas o ângulo θ **não é mais constante**. Dito isso, vamos à modelagem do problema. Considere a Figura 6.22. O comprimento do fio é $L = \pi R$, de modo que a densidade linear de carga λ será

$$\lambda = \frac{Q}{L} \Rightarrow Q = \lambda L.$$

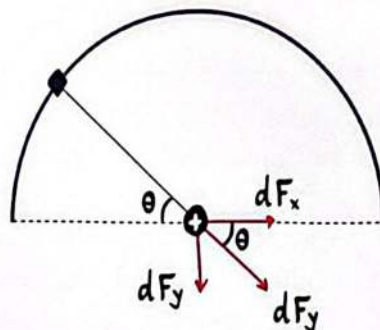


Figura 6.22: Força infinitesimal dF exercida por um elemento infinitesimal. Simetria horizontal.

Consideremos, então, um elemento infinitesimal dL do arco, cuja carga dQ será dada por $dQ = \lambda dL$. A força total exercida por esse infinitesimal sobre a carga pontual, pela Lei de Coulomb, será dada por $dF = k_e \cdot \frac{q \cdot dQ}{R^2}$.

Como já comentado, pela simetria do problema, não haverá componente horizontal, uma vez que elas irão se cancelar. Assim, a resultante será vertical para baixo. A componente vertical dF_y exercida por um elemento infinitesimal é:

$$dF_y = dF \sin(\theta) = k_e \cdot \frac{q \cdot dQ}{R^2} \sin(\theta) = \frac{k_e \cdot q}{R^2} \sin(\theta) dQ. \quad (6.26)$$

Lembre-se que o ângulo θ não é constante, logo, ele não poderá “sair da integral”. Observe, também, que o elemento infinitesimal está em função da carga dQ , ou seja, nossa missão agora é relacionar esses dois elementos.

Faremos isso por meio da Figura 6.23. Da Geometria Plana, sabemos que o comprimento C de um arco cujo ângulo central, em radianos, mede α , é dado por $C = R\alpha$. Escrevendo a versão infinitesimal dessa relação teremos

$$dL = R d\theta.$$

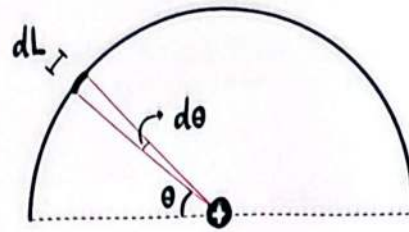


Figura 6.23: Relação entre os infinitesimais dL e $d\theta$.

Assim, podemos escrever: $dQ = \lambda dL = \lambda R d\theta$. Voltando então à Equação (6.26) da força, temos:

$$dF_y = \frac{k_e \cdot q}{R^2} \sin(\theta) dQ = \frac{k_e \cdot q}{R^2} \sin(\theta) \lambda R d\theta = \frac{k_e \cdot q \cdot \lambda}{R} \sin(\theta) d\theta.$$

Observe que chegamos a uma expressão para o infinitesimal da força em função apenas de uma variável: a força infinitesimal dF_y está escrita apenas em função de θ . Agora, basta apenas “somar” a influência de cada infinitesimal das forças ou, em outras palavras, basta efetuar a integral. Repare que é de suma importância definir o intervalo de integração. Nesse caso, por se tratar de uma semicircunferência, temos que varrer o intervalo $[0, \pi]$, de modo que a força total será dada por

$$F_y = \int dF_y = \int_0^\pi \frac{k_e \cdot q \cdot \lambda}{R} \sin(\theta) d\theta = \frac{k_e \cdot q \cdot \lambda}{R} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta.$$

Resta agora a parte mais fácil de todas: *resolver uma simples integral*.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta &= [-\cos(\theta)] \Big|_0^\pi = -\cos(\theta) \Big|_0^\pi \\ &= -(\cos(\pi) - \cos(0)) = -(-1 - 1) = 2. \end{aligned}$$

Finalmente, a força resultante exercida pelo aro sobre a partícula será dada por

$$F_y = 2 \frac{k_e q \lambda}{R}.$$

Lembrando que $\lambda = Q/L = Q/\pi R$, podemos reescrever a expressão acima como

$$F_y = \frac{2k_e Qq}{\pi R^2},$$

que é a expressão final para o valor da força exercida pelo aro sobre a partícula.

Capítulo 7

Integrais: Cálculo e Técnicas

7.1 Introdução

Reservamos esse momento para uma pequena reflexão. Podemos dizer que tudo o que é mais importante a respeito do Cálculo já lhe foi apresentado. Do ponto de vista ferramental, o leitor já possui o conhecimento básico para a resolução das integrais, a dizer:

Integrais elementares: polinomial, exponencial, trigonométrica, etc;

Propriedades básicas: funções multiplicadas por constante e soma de funções.

Com essas propriedades já fomos capazes de resolver uma boa parte das integrais que apareceram. Resolvemos, inclusive, integrais que modelamos a partir de problemas reais bastante interessantes.

O objetivo do presente capítulo é munir o leitor de mais ferramentas, para que ele possa resolver os mais variados tipos de integrais que encontrar. São muitas as situações que podem aparecer, e devemos estar prontos para enfrentá-las.

Talvez o leitor esteja pensando *“Ora, mas eu já sei derivar, integrar não seria só fazer o inverso?”*.

É uma boa pergunta. No entanto, para não perder o bom costume de fazer uma provocação, pergunto-lhe se você sabe me dizer, de imediato, qual a função que, ao ser derivada, resulta em alguma das funções abaixo:

$$f(x) = \cos(2x) \quad ; \quad f(x) = x\sqrt{x^2 + 1} \quad ; \quad f(x) = x^2 \cos(x).$$

Talvez, depois de pensar por alguns segundos, você tenha conseguido pensar na antiderivada da primeira. Ela não é absolutamente imediata, mas também não é tão complicada assim. Nesse caso, teríamos:

$$\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x) + C.$$

Derive a função encontrada e veja por si mesmo.

Agora, no caso da segunda função, já começo a desconfiar que não tenha sido possível encontrar sua integral de forma tão imediata. Tal integral seria:

$$\int x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Recomendo, mais uma vez, que o leitor derive a função e veja por si mesmo. Agora, repare bem a integral da terceira função:

$$\int x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + C.$$

Serei franco agora: se por acaso me disseses que obtiveras sucesso em computar tal integral, mentalmente e de imediato, hei de dizer, sem hesitar, que és um impostor, caro leitor. Não me tome por rude, mas hás de convir comigo que esta integral não é nada trivial, mais ainda para um principiante, recém-chegado aos campos do Cálculo, onde o solo é fértil, mas cheio de armadilhas sutis.

Essa, portanto, é a reflexão que desejo trazer para o início deste capítulo. Sim, a essa altura você já tem um bom domínio e está munido de todas as ferramentas para derivar qualquer função. Tenho certeza de que, até para essa última função, seja perfeitamente capaz de realizar sua derivada e verificar a veracidade do que lhe digo. No entanto, para resolver boa parte das integrais, precisaremos cavar um pouco mais e adquirir novas ferramentas que nos permitam executar tal tarefa ¹. Portanto, façamos isso.

7.2 Integração por Substituição

Iniciaremos essa seção buscando a solução da seguinte integral:

$$\int e^{3x} dx.$$

Nesse momento, compartilho com você a sensação que tive na primeira vez que me deparei com essa situação, em que minha reação imediata foi pensar: “*Ora, a integral da exponencial é ela mesma*”. Logo, seria óbvio que a integral de tal função fosse:

$$\int e^{3x} dx = e^{3x} + C.$$

Tal argumento parece razoável, mas daí você efetua a derivada e verifica que

$$\frac{d}{dx}(e^{3x}) = 3e^{3x},$$

¹Quando o leitor se convencer de que o processo de integração é substancialmente mais complicado do que o de derivação, recomenda-se a leitura do Apêndice D, no qual é feita uma digressão a respeito da diferença entre essas operações.

ou seja, erramos. A derivada da função que eu inicialmente propus é, na verdade, o triplo da função que eu queria integrar. Para corrigir isso, basta dividir por 3 a nossa função inicialmente proposta que estará tudo resolvido. Podemos verificar que de fato isso está certo, como segue:

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C, \quad \text{pois} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}e^{3x} + C\right) = \frac{1}{3} \cdot 3e^{3x} = e^{3x}.$$

Com raciocínio análogo, podemos ver, por exemplo, que

$$\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x) + C,$$

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C,$$

$$\int \sin(7x) dx = -\frac{1}{7} \cos(7x) + C.$$

No entanto, estamos limitados à situação em que o “antigo x ” aparece agora multiplicado por uma constante k . É como se estivéssemos aplicando a **Regra da Cadeia** só que na ordem inversa, ou seja, ao invés de multiplicar o resultado pela constante k , (que seria a derivada da função de dentro, já que $d/dx(kx) = k$), nós dividimos por k . Afinal, estamos integrando e não derivando. A construção dessa ideia, contudo, pode ser melhor estruturada.

Suponha que desejamos calcular a integral que propus no início:

$$\int e^{3x} dx,$$

porém, que não queiramos simplesmente usar o raciocínio inverso da derivada e, sim, sistematizar o processo. Lembre-se, também, das armas que já possui: para começar você sabe calcular a integral de funções elementares. Você sabe, por exemplo, que:

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Então, apresento-lhe, caro leitor, a primeira ideia: e se substituíssemos $3x$ por uma outra variável? Por exemplo, u . Ou seja, $u = 3x$. Isso deixaria a integral um pouco mais próxima do caso elementar, em que ela se transformaria em:

$$\int e^{3x} dx = \int e^u dx. \quad (7.1)$$

Note que o integrando foi de e^{3x} (que não é elementar) para e^u (que é elementar).

Porém, um problema surge. No capítulo anterior, ao explicar a notação de integral, a dizer

$$\int_a^b f(x) dx,$$

imagino que tenha ficado extremamente claro o significado do símbolo $\int$, dos limites de integração a e b e até mesmo do integrando $f(x)$. Entretanto, propositalmente, não nos aprofundamos muito no termo “ dx ” e ele, até aquele momento, parecia realmente não desempenhar papel algum.

Contudo, como já havíamos mencionado, o diferencial dx indica que a integral deve ser feita com relação à variável x . Logo, voltando à integral da Equação (7.1), percebemos que a função a ser integrada está escrita em função de u , mas ela deve ser integrada com relação a x , uma vez que o elemento infinitesimal é dx .

Compartilho novamente com o leitor a primeira reação que me veio à mente quando me deparei com essa situação. Pensei: “Bom, como se tratam de infinitesimais, não faz diferença dx e du . Uma vez que $u = 3x$, quando x fica infinitamente pequeno (que é a ideia do dx), u , também fica infinitamente pequeno (que é a ideia do du). Então, eu posso simplesmente substituir dx por du ”.

O que parece fazer sentido, mas lembre-se que, em quase tudo na vida, o problema está nos detalhes. De fato, quando x fica muito pequeno, u também fica muito pequeno. No entanto, a essa altura, você sabe que existem infinitos maiores que outros, existem pequenos menores que outros, ainda que os dois sejam infinitamente pequenos.

Definimos a função $u = 3x$. Vamos analisar suas respectivas variações em x e em u para alguns pontos aleatórios (fique à vontade para experimentar outros).

x_1	x_2	Δx	u_1	u_2	Δu	$\Delta u / \Delta x$
1,0	1,1	0,1	3	3,3	0,3	3
5,000	5,004	0,004	15,000	15,012	0,012	3
10,00000	10,00002	0,00002	30,00000	30,00006	0,00006	3

Tabela 7.1: Relação entre Δx e Δu para diversos valores.

O ponto principal dessa tabela é perceber que, independentemente do valor escolhido, ao aplicar em x uma variação qualquer, a quantidade u varia 3 vezes mais. Isso é evidenciado na última coluna, quando vemos que $\Delta u / \Delta x = 3$. De maneira equacionada, temos:

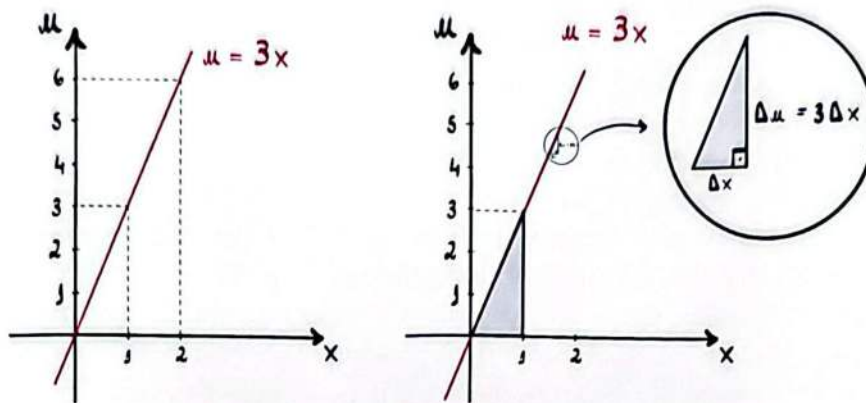
$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \Delta u = 3 \Delta x. \quad (7.2)$$

Outra maneira bastante clara de visualizar essa relação é através do gráfico que relaciona as duas variáveis. A Figura 7.1 mostra isso. Nela, mais uma vez, é possível ver que $\Delta u = 3\Delta x$.

Pensando no limite em que Δu e Δx são infinitamente pequenos — ou seja, $\Delta x \rightarrow dx$ e $\Delta u \rightarrow du$ —, a Equação (7.2) fica:

$$du = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \Delta u = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3\Delta x = 3 dx. \quad (7.3)$$

Isso é bastante intuitivo, concorda? Um pouco adiante as coisas não serão tão intuitivas e simples como nesse caso. No entanto, fazendo exatamente a mesma análise, elas ficarão muito mais evidentes e todo esse trabalho será justificado.

Figura 7.1: Relação entre as variáveis $u = 3x$.

Observe que as relações da Equação (7.3) poderiam ter sido obtidas derivando a função u com relação a x , como segue:

$$u = 3x \implies x = \frac{u}{3} \implies \boxed{dx = \frac{1}{3} du.} \quad (7.4)$$

Essa equação simplesmente nos diz que a variação de u é sempre 3 vezes a variação de x ou, alternativamente, que a variação de x é a terça parte da variação de u .

Toda essa conversa, caro leitor, é com fins de convencê-lo de que não se pode simplesmente ignorar o diferencial e trocar dx por du . Acabamos de encontrar a relação entre eles e é sempre preciso se atentar a esse passo.

Podemos, então, dar continuidade à solução da nossa integral. Efetuando as substituições fornecidas pela Equação (7.4), ou seja, colocando $3x = u$ e $dx = \frac{1}{3} du$:

$$\int e^{3x} dx = \int e^u \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int e^u du. \quad (7.5)$$

O problema está resolvido. A letra em si que está sendo usada para representar a integral, essa sim, pouco importa:

$$\int e^x dx = e^x + C \quad ; \quad \int e^v dv = e^v + C \quad ; \quad \int e^w dw = e^w + C.$$

Dessa maneira, é evidente que

$$\int e^u du = e^u + C. \quad (7.6)$$

Porém, é claro: nunca se esqueça de retornar às variáveis originais. A variável u foi um artifício que usamos para solucionar a integral, portanto, ela não deve aparecer na resposta. Escrevendo, finalmente, a integral em função de x , lembrando que $u = 3x$, temos:

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{3x} + C.$$

Observe que já havíamos chegado a esse resultado de uma maneira mais intuitiva no início da seção. Sim, o raciocínio intuitivo é muito rico e tem o seu valor, mas ressalto que essa sistematização nos ajudará muito em passos futuros.

Pois bem, caro leitor, confesso-lhe que o debate em torno deste problema estendeu-se mais do que o necessário — e talvez mais do que o sensato e mais do que já foi feito em qualquer livro desse tipo. Trocamos ideias, rabiscamos uma tabela, fizemos substituições engenhosas, montamos gráficos e, verdade seja dita, eu próprio gastei mais palavras do que o estritamente indispensável — o entusiasmo, às vezes, é um traidor elegante. Porém, entre nós, tudo isso foi mais cerimônia que necessidade, a título de deixar claro e transparente todo o processo que, veja bem, é de uma simplicidade quase insultuosa. No entanto, para que não lhe reste dúvida — nem paciência a perder —, resumo-lhe tudo no que segue.

Resumo da resolução

Queremos calcular a seguinte integral:

$$\int e^{3x} dx.$$

Fazendo a substituição $u = 3x$ e derivando essa função, temos:

$$u = 3x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx = \frac{1}{3} du.}$$

Substituindo na integral original, temos:

$$\begin{aligned} \int e^{3x} dx &= \int e^u \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int e^u du \\ &= \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{3x} + C. \end{aligned}$$

Um tanto quanto simples, concorda? Vejamos como as coisas podem ficar um pouco mais interessantes.

Exemplo 7.1

Calcule $\int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

Observe que esse problema se trata de uma **integral definida**. Nesse caso, nós temos dois caminhos possíveis.

Caminho 01: Fazer o padrão. Ou seja, resolver a integral exatamente da maneira que temos feito e aplicar os limites de integração.

Caminho 02: Realizar a substituição e, ao invés de voltar pra variável original

x , ajustamos os limites de integração para a função u . Como é uma integral definida, o resultado é numérico. Então, a variável de integração não exercerá influência.

Solução 01

Consideremos a substituição:

$$u = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2u \quad \Rightarrow \quad dx = 2 du.$$

Substituindo na integral (sem se preocupar com os limites de integração):

$$\begin{aligned} \int \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx &= \int \sin(u) \cdot 2 du \\ &= 2 \int \sin(u) du \\ &= -2 \cos(u) + C. \end{aligned}$$

Voltando à variável original, a integral se torna:

$$\int \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = -2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Agora sim, aplicamos os limites de integração $x = 0$ e $x = \pi$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx &= \left[-2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^\pi \\ &= -2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos(0) \\ &= -2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2.}$$

Solução 02

Consideremos a mesma substituição:

$$u = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2u \quad \Rightarrow \quad dx = 2 du.$$

Ajustando os limites de integração de x para u , temos:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \quad \text{e} \quad x = \pi \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\pi}{2}.$$

Substituindo na integral:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u) \cdot 2 du \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u) du \\
 &= 2(-\cos(u)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0)\right) \\
 &= 2(-0 + 1) = 2.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2.}$$

Não acredito que um método tenha grande superioridade com relação ao outro. Pessoalmente, no entanto, prefiro usar a **Solução 02**. Escolha aquela que se sentir mais confortável, caro leitor. Ou talvez seja melhor escolher a que te deixa mais desconfortável, pois, assim, você sai um pouco da zona de conforto e vai um pouco além.

Sigamos adiante. Suponha que dessa vez desejamos calcular a seguinte integral:

$$\int x\sqrt{x^2 + 1} dx. \quad (7.7)$$

Bom, uma vez que eu já adiantei que podemos resolver a integral com o artifício da substituição, eu pergunto ao leitor: *se você tivesse que escolher uma parte da função no integrando para substituir por u , que parte você escolheria?*

Mais tarde entenderemos o porquê dessa escolha, mas não me assusto se você acertou o palpite. A melhor substituição é exatamente a que acredito ser a mais intuitiva, ou seja,

$$u = x^2 + 1. \quad (7.8)$$

E agora, como já adiantei, o ponto importante de atenção é a relação entre os diferenciais. Derivando a função da Equação (7.8), temos:

$$du = 2x dx. \quad (7.9)$$

Voltando ao exemplo do início do capítulo, lá usamos a substituição $u = 3x$, e, conseqüentemente, vimos que $du = 3 dx$. Isso significava que a variação da variável u , independentemente do ponto de avaliação x , era sempre o triplo da variação da variável x .

A informação que a Equação (7.9) nos traz é um tanto quanto diferente. Ela nos diz que a variação da variável u é diretamente proporcional não apenas ao valor de

dx , mas também ao valor de x . Vamos analisar a tabela a seguir para ter uma noção do que está acontecendo.

x_1	x_2	Δx	u_1	u_2	Δu	$\frac{\Delta u}{\Delta x}$	$2x$
1,0	1,1	0,1	2,0	2,21	0,21	2,1	2,0
5,000	5,004	0,004	26,000	26,040	0,04	10,0004	10,000
10,00000	10,00002	0,00002	101,0000	101,0004	0,0004	20	20

Tabela 7.2: Relação entre Δx e Δu para diversos valores.

Outra maneira interessante de visualizar essa situação é através do gráfico que relaciona as variáveis x e u . A Figura 7.2 ilustra isso e nela é possível ver que a inclinação da curva se altera à medida que x varia.

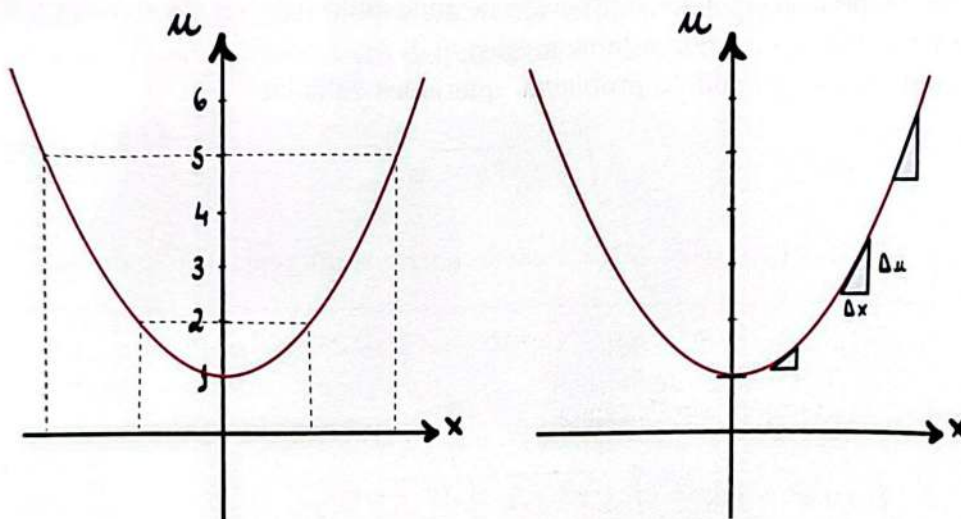


Figura 7.2: Gráfico da função $u = x^2 + 1$ e relação entre Δu e Δx .

Observe que, à medida que reduzimos as variações Δx , duas coisas acontecem:

- as variações Δu também se reduzem;
- a razão $\Delta u / \Delta x$ se aproxima de $2x$, como é evidenciado pela tabela. Esse é o ponto de maior importância.

E qual o motivo de toda essa discussão? Quero elucidar o leitor de que nem sempre a razão entre os diferenciais é uma constante. Nesse caso, por exemplo, temos que no limite:

$$du = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \Delta u = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x \Delta x = 2x dx.$$

Então, caro leitor, antes de continuar a resolução da integral, coloco o seguinte questionamento: *neste momento, você consegue me responder com bons argumentos,*

por qual motivo escolhemos a substituição $u = x^2 + 1$? Reflita um pouco a respeito antes de continuar a leitura.

Eis o motivo da escolha. Ao fazê-la, você deve levar em consideração duas coisas:

1. A função que você substituirá por u (essa é a parte mais óbvia);
2. A derivada dessa função, pois você precisará substituir o diferencial dx por du .

Lembre-se sempre que, além de substituir a função, você terá que substituir, também, o diferencial e foi esse o grande motivo da minha escolha: $u = x^2 + 1$.

O raciocínio foi: *Fora da raiz tem um termo " $x dx$ ". Portanto, se eu escolher uma função quadrática para substituir por u , na sua derivada aparecerá o fator $x dx$, então, todos os termos em x poderão ser substituídos por u .*

Observe, caro leitor, que aqui me dou o trabalho de explicar-lhe todo o processo de raciocínio por trás de uma escolha para a substituição, ao invés de simplesmente fazer a substituição. Essas escolhas muitas vezes são simples, mas às vezes não são tão óbvias e é preciso entender o processo de raciocínio por trás da escolha para que possa se virar sozinho quando a hora chegar.

Resumindo e concluindo o problema, queremos calcular:

$$\int x\sqrt{x^2 + 1} dx.$$

Fazendo a substituição $u = x^2 + 1$, a relação entre os diferenciais é dada por:

$$du = 2x dx \quad \Rightarrow \quad x dx = \frac{1}{2} du.$$

Então, substituindo na integral, temos:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2 + 1} dx &= \int \sqrt{x^2 + 1} \cdot x dx && \text{(Substituindo)} \\ &= \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du && \text{(Reorganizando)} \\ &= \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du && \text{(Resolvendo a Integral)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C && \text{(Reorganizando)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C && \text{(Voltando à variável original)} \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Pronto, a integral está resolvida. Uma recomendação que sempre faço é que o nobre leitor derive a função obtida, não só para treino, mas para verificar se houve algum equívoco ao longo do processo.

Para os leitores mais teóricos, enuncio a Regra da Substituição de maneira formal a seguir:

Regra da Substituição

Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo dado. Seja, também, $u = g(x)$ uma função diferenciável nesse intervalo. Então, temos:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du,$$

ou, na notação de Leibniz, tem-se:

$$\int f \circ g \frac{dg}{dx} dx = \int f(u) du.$$

O principal ponto que trago ao longo dessa discussão é: a escolha da substituição deve ser feita de maneira crítica. Ou seja, pense na função que escolherá para efetuar a substituição e pense, também, em quais termos aparecerão quando efetuar a derivada dessa função. Essa é a chave para definir a melhor escolha.

Exemplo 7.2

Calcule $\int 45x^2 \sqrt{5x^3 + 7} dx$.

Note que, dentro da raiz, temos um termo cúbico em x que, ao ser derivado, resultaria em um termo quadrático, que é justamente o termo que aparece fora da raiz quadrada, junto do dx , isto é, o fator $45x^2 dx$. Logo, façamos a seguinte substituição:

$$u = 5x^3 + 7 \quad \Rightarrow \quad du = 15x^2 dx.$$

Note que temos $45x^2 dx = 3 \cdot (15x^2 dx) = 3 du$. Assim, a integral se torna:

$$\begin{aligned} \int 45x^2 \sqrt{5x^3 + 7} dx &= \int \sqrt{u} \cdot 3 du \\ &= 3 \int u^{1/2} du \\ &= 3 \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C \\ &= 3 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= 2u^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Voltando à variável original:

$$2(5x^3 + 7)^{3/2} + C.$$

Portanto,

$$\int 45x^2 \sqrt{5x^3 + 7} dx = 2(5x^3 + 7)^{3/2} + C.$$

7.3 Integração por Partes

7.3.1 Ideia da Técnica

Como já foi explicitado, o atual capítulo é dedicado a apresentar ao leitor diversas técnicas que lhe permitirá resolver os mais diversos tipos de integrais. A **Integração por Substituição** foi apenas a primeira delas. Nela nós vimos que, escolhendo de maneira estratégica uma parcela da função a ser integrada por uma nova variável u , poderíamos transformar a integral em uma integral elementar e resolvê-la baseado nos conhecimentos prévios. Vimos, também, que essa técnica consistia, em certa medida, na *Regra da Cadeia* (na derivação), mas aplicada de uma perspectiva inversa (agora na integração).

Seguimos agora com a **Integração por Partes**. Mostraremos que essa técnica consiste, em certa medida, na **Regra do Produto**, só que agora aplicada à integração.

A nossa motivação inicial é resolver a integral:

$$\int x \cos(x) dx.$$

Você consegue responder rapidamente qual a função que, ao ser derivada, resulta em $x \cos(x)$? Recomendamos que o leitor tente deduzir qual seria o resultado. Não com o intuito de acertar, mas com o intuito de entender a dificuldade por trás do que ali está.

Para iniciarmos o processo, relembremos a Regra do Produto para derivadas:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) g'(x) + f'(x) g(x).$$

Podemos escrever exatamente a mesma coisa na notação de integral. Você pode interpretar que estamos integrando ambos os lados com relação a x . Nesse caso, fica

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx}(f(x) g(x)) dx &= \int (f(x) g'(x) + f'(x) g(x)) dx \\ f(x) g(x) &= \int f(x) g'(x) dx + \int f'(x) g(x) dx. \end{aligned}$$

Deixaremos para incluir a constante C ao final das integrações. Podemos, também, reorganizar os termos dessa equação, ficando:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx. \quad (7.10)$$

É interessante visualizarmos essa técnica, em certa medida, como uma substituição, porém, agora com duas novas variáveis.

Definindo $u = f(x)$, ao derivar obtemos:

$$\boxed{u = f(x)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{du = f'(x) dx.} \quad (7.11)$$

Analogamente, para $v = g(x)$, temos:

$$\boxed{v = g(x)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{dv = g'(x) dx.} \quad (7.12)$$

Substituindo, na Equação (7.10), as expressões encontradas nas Equações (7.11) e (7.12), podemos reescrever:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (7.13)$$

Essa é a maneira mais prática de escrever a integração por partes. Dada sua importância, deixá-la-ei com o referido destaque:

Integração por Partes

Sejam u e v funções de x . Então, vale que

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Perceba que a técnica consiste em trocar o cálculo de uma integral, isto é, $\int u dv$, pelo cálculo de uma outra integral, no caso, $\int v du$. Assim, é preciso fazer uma escolha inteligente para não acabarmos trocando seis por meia dúzia, ou quem sabe até trocar seis por raiz quadrada do seno de $3i$ — algo muito mais complexo do que se tinha inicialmente. O método será eficiente quando conseguirmos trocar uma integral que não sabemos resolver por outra que sabemos. No exemplo que segue faremos uma discussão detalhada do método, acompanhe-o com atenção.

Exemplo 7.3

Calcule a integral: $\int x \cos(x) dx$.

A primeira pergunta que deve surgir na cabeça do leitor é: “qual função será u e qual será v ?”.

Pois bem, em um primeiro momento, esse passo parecerá arbitrário. Em breve, mostraremos uma técnica para que você consiga efetuar as melhores escolhas possíveis.

Na expressão da Integração por Partes, temos:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Observe que, na parcela da esquerda, temos dois elementos:

- A variável u ;
- O diferencial dv .

Então, são essas as duas coisas que precisamos definir:

1. Quem será a variável u ?
2. Quem será o diferencial dv ?

Com a escolha de u , ao derivar conseguiremos determinar o diferencial du .

Com a escolha do diferencial dv , podemos integrar e determinar qual será a variável v .

Façamos, de modo aparentemente arbitrário, as seguintes substituições:

(i) Definida a variável u :

$$\boxed{u = x} \xrightarrow{\text{derivando}} \boxed{du = dx}.$$

(ii) Definido o diferencial dv :

$$\boxed{dv = \cos(x) \, dx} \xrightarrow{\text{integrando}} \boxed{v = \sin(x)}.$$

Substituindo esses termos na integral, temos:

$$\begin{aligned} \int u \, dv &= uv - \int v \, du \\ \int x \cos(x) \, dx &= x \cdot \sin(x) - \int \sin(x) \, dx. \end{aligned}$$

Você consegue enxergar o que aconteceu? Apareceu, simplesmente, uma integral de uma função elementar. A integral que a princípio era um produto de uma função algébrica (x) e uma trigonométrica ($\cos(x)$) se transformou em apenas uma integral trigonométrica simples: $\int \sin(x) \, dx$. Logo:

$$\boxed{\int x \cos(x) \, dx = x \sin(x) + \cos(x) + C.}$$

Caso o leitor não tenha conseguido encontrar a resposta pelo método de tentativa e erro no início da seção, recomendo que derive essa função obtida e veja o que acontece. Esse processo é muito importante: ver que alguns termos se cancelam e perceber que isso não é tão simples de ser visto sem usar essa técnica.

No exemplo anterior, poderíamos ter feito a substituição de u e dv de forma diferente. Para que ele não ficasse mais extenso, separamos a discussão a seguir sobre o que aconteceria se a escolha das variáveis u e v fossem invertidas.

Exemplo 7.4

Calcule a integral: $\int x \cos(x) dx$.

Começamos escolhendo as variáveis de maneira inversa à que fizemos no exemplo anterior. Dessa maneira, fica:

(i) Definida a variável u :

$$\boxed{u = \cos(x)} \xrightarrow{\text{derivando}} \boxed{du = -\sin(x) dx}.$$

(ii) Definido o diferencial dv :

$$\boxed{dv = x dx} \xrightarrow{\text{integrando}} \boxed{v = \frac{1}{2}x^2}.$$

Substituindo esses novos termos no formato da integral por partes, temos:

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du \\ \int x \cos(x) dx &= \frac{1}{2}x^2 \cos(x) - \int \frac{1}{2}x^2 (-\sin(x) dx) \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cos(x) + \frac{1}{2} \int x^2 \sin(x) dx. \end{aligned}$$

Note que a situação ficou drasticamente pior. O problema inicial era que o integrando da função era uma mistura de função algébrica (x) com trigonométrica ($\cos(x)$). Agora o integrando não só continua uma parcela trigonométrica ($\sin(x)$), como também continuou com uma parcela algébrica (x^2), porém, ainda pior, posto que agora é ela é quadrática.

Entenda, caro leitor: nada tem de errado (matematicamente) no que fizemos. Entretanto, cá entre nós, a escolha feita está longe de ser inteligente. Afinal, conseguimos piorar um problema que já estava ruim. Dito isso, a discussão que nos interessa é a seguinte: qual critério podemos utilizar para a escolha das variáveis u e v ? A subseção seguinte é dedicada a esse assunto.

7.3.2 Estratégia para escolha das variáveis

Foi visto que, no método da Integral por Partes, a integral que se deseja resolver se transforma em duas parcelas: um produto de duas funções e uma nova integral.

Na aplicação do método, a primeira etapa consiste em definir quais serão as variáveis u e v . Conforme foi visto nos exemplos anteriores, essa escolha é crucial, uma vez que ela vai definir o rumo do problema. Se a escolha não é feita de forma correta, a integral remanescente pode ser ainda mais complicada do que a integral inicial, como ocorreu no Exemplo 7.4. Então, nossa missão é definir um critério para a escolha dessas funções.

Vamos pensar um pouco sobre o problema. Para tanto, considere os seguintes tipos de funções que serão referidos pelas letras:

- L:** Logarítmica
- I:** Inversa Trigonométrica
- A:** Algébrica
- T:** Trigonométrica
- E:** Exponencial

Em seguida, consideremos a expressão do método da Integral por Partes:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

É importante analisar dois pontos:

- (i) À esquerda, aparece a variável u e, à direita, aparece o diferencial du , ou seja, ao longo do processo aparece a **derivada** da função que relaciona u e x .
- (ii) À esquerda, aparece o diferencial dv , enquanto à direita, aparece a variável v , ou seja, ao longo do processo aparece a **integral** da função que relaciona as variáveis v e x .

Minha sugestão é que se pense da perspectiva da variável u . Nesse caso, aqui vai mais uma provocação:

“Qual seria o pior tipo de função para escolhermos como função u ?”

Pare um pouco e reflita. Para ser capaz de responder, o primeiro ponto a ser entendido é que nosso objetivo principal reside em **transformar** o integrando. Transformar uma função que não sabemos integrar em alguma que saibamos, que seja mais simples.

Pensando sob essa ótica, devemos concordar que quando o quesito é *transformação* a pior função a ser escolhida é a **Exponencial**. As exponenciais têm como derivadas as próprias exponenciais, de modo que derivar funções exponenciais não gera, na prática, transformação alguma. Logo, na nossa lista de prioridades, essa função ocupará a última posição.

Em segundo plano, estão as funções **Trigonométricas**. A maioria delas é cíclica na derivação, gerando sempre outras funções trigonométricas. Por exemplo, derivar $\sin(x)$ gera $\cos(x)$. Derivar $\cos(x)$ gera $-\sin(x)$ (a menos de um sinal). No fundo, sendo a função cosseno apenas a função seno deslocada de $\pi/2$, isto é

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

vemos que derivá-las as reconduz, de certo modo, em si mesmas, com apenas uma ligeira modificação no argumento. Diga-se de passagem, essa não é lá uma transformação muito interessante. Logo, apesar de serem melhores que as exponenciais, essas também não merecem nossa prioridade.

Por sua vez, quando falamos sobre funções **Algébricas** (x^n), mudanças mais palpáveis começam a acontecer. Embora não sejam transformações gigantescas, ao derivar uma função algébrica, o grau da função resultante se reduz em uma unidade. Isso nos indica que podemos reduzir o grau dessa função até chegar a uma constante, de maneira que a função que acompanha a algébrica poderá ser integrada de maneira independente. Foi exatamente o que aconteceu no Exemplo 7.3. Tínhamos como integrando a função $x \cos(x)$ e, reduzindo o grau da algébrica, transformamos o integrando em $\sin(x)$. Portanto, essas funções estão em uma prateleira acima das trigonométricas.

Agora, quando a conversa é sobre funções **Inversas Trigonômétricas** e **Logarítmicas**, a derivação leva a transformações gigantescas. Em suas formas mais simples, temos, por exemplo:

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

A derivação dessas funções gera funções racionais, algébricas, entre outras, que podem ser utilizadas de forma estratégica na integração por partes. Essa é uma ferramenta poderosíssima que, quando usada da maneira correta, gera grandes simplificações, como veremos em exemplos posteriores. Então, esses são os dois tipos de funções que ocupam a posição mais alta na nossa “prateleira das substituições”.

Dessa maneira, a sugestão que o autor vos faz é que utilize uma regra prática conhecida como **LIATE** na escolha da variável u , na qual priorizamos, nessa ordem, as funções Logarítmicas, Inversas Trigonômétricas, Algébricas, Trigonômétricas e, por último, as Exponenciais.

Lembre-se que o objetivo é *modificar* os integrandos, e essa é a ordem de prioridade que melhor atende à nossa demanda. Desde já, porém, alerta para a possibilidade de que essa escolha não funcione em todas as situações. No entanto, como argumentado, essa é a melhor estratégia que temos à disposição. Sigamos para alguns exemplos para colocá-la em prática.

Exemplo 7.5

Calcule a integral $\int x \cdot e^x dx$.

O integrando é composto por funções dos tipos:

Algébrica : x ; Exponencial : e^x .

Assim, pela regra **LIATE**, damos preferência para escolher como u a função algébrica x , deixando $dv = e^x dx$.

Assim, fazemos:

$$\begin{array}{lll} u = x & \implies & du = dx, \\ dv = e^x dx & \implies & v = e^x. \end{array}$$

Aplicando a fórmula da integração por partes:

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du \\ \int x \cdot e^x dx &= x \cdot e^x - \int e^x dx \\ &= x \cdot e^x - e^x + C. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado final é:

$$\boxed{\int x \cdot e^x dx = e^x(x - 1) + C.}$$

Exemplo 7.6

Calcule a integral: $\int e^x \cdot \cos(x) dx$.

Antes de começarmos a resolver de fato, repare que o integrando é composto pelo que denominamos serem os dois “piores” tipos de funções a serem trabalhadas: Trigonométrica e Exponencial. Dito isso, sigamos como planejado.

Aplicando a regra do **LIATE** na integração por partes, escolhemos:

$$\begin{array}{lll} u = \cos(x) & \implies & du = -\sin(x) dx, \\ dv = e^x dx & \implies & v = e^x. \end{array}$$

Aplicando a fórmula da integral por partes:

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \cos(x) dx &= e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot (-\sin(x)) dx \\ &= e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cdot \sin(x) dx. \end{aligned}$$

Observe que o integrando da função remanescente continua formado pelo produto de uma função exponencial e uma trigonométrica. A única diferença é que a função mudou de $\cos(x)$ para $\sin(x)$. Talvez você possa ter a impressão de que não faz sentido continuar o processo, mas na verdade, não só podemos, como também devemos continuar.

Aplicamos a integração por partes novamente na integral $\int e^x \cdot \sin(x) dx$. Escolhemos:

$$\begin{aligned} u = \sin(x) &\implies du = \cos(x) dx, \\ dv = e^x dx &\implies v = e^x. \end{aligned}$$

Aplicando o método, temos:

$$\int e^x \cdot \sin(x) dx = e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x) dx.$$

Algo semelhante ao que ocorreu na primeira parte aconteceu de novo. Continuamos com uma integral com termos exponencial e trigonométrico. Porém, dessa vez, a integral obtida é idêntica à integral original. Então, algo fantástico acontece. Fazamos a substituição dos resultados encontrados na integral original:

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \cos(x) dx &= e^x \cdot \cos(x) + \left(e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x) dx \right) \\ &= e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x) dx. \end{aligned}$$

É possível, logo, isolar a integral original. Fazendo isso, temos:

$$2 \int e^x \cdot \cos(x) dx = e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x)),$$

ou seja, o resultado final dessa integral é:

$$\boxed{\int e^x \cdot \cos(x) dx = \frac{e^x}{2} (\sin(x) + \cos(x)) + C.}$$

7.4 Integração por Substituição Trigonométrica

A técnica denominada “Integração por Substituição” já foi estudada com detalhes na Seção 7.2. No entanto, há um caso mais específico que merece atenção especial: a **Integração por Substituição Trigonométrica**. Para ilustrar nosso objetivo, considere a integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx. \quad (7.14)$$

À primeira vista, pode parecer que o método da substituição comum irá funcionar ao substituir $u = 4 - x^2$. Isso, no entanto, não irá acontecer. Fica como sugestão que o leitor tente efetuar essa substituição e constate que não será possível escrever todos

os termos em função de u , e isso nos leva à conclusão de que devemos lançar mão de outra ferramenta.

Contudo, antes de simplesmente enunciar a substituição que será feita, faço a seguinte provocação:

A expressão $\sqrt{4-x^2}$ te remete a alguma forma geométrica?

Essa é a equação de uma semicircunferência superior de raio $R = 2$ centrada na origem, mas com a variável y , isolada, como segue:

$$x^2 + y^2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm \sqrt{4 - x^2}. \quad (7.15)$$

E, uma vez que o assunto é circunferência, quais seriam as funções que possuem simetria circular? As **funções trigonométricas**. Através da Relação Fundamental da Trigonometria, dada por:

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1, \quad (7.16)$$

podemos estabelecer uma relação interessante entre as variáveis x e y e a variável θ , como segue:

$$x = 2 \sin(\theta) \quad ; \quad y = 2 \cos(\theta).$$

Fazendo isso, as Equações (7.16) e (7.15) se tornam sinônimas, como pode ser visto a seguir:

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) &= 1 \\ 4 \sin^2(\theta) + 4 \cos^2(\theta) &= 4 \\ (2 \sin(\theta))^2 + (2 \cos(\theta))^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 &= 2^2. \end{aligned}$$

Vejamos, então, como esse artifício pode nos ajudar a resolver não só a integral da Equação (7.14), mas também várias outras.

Exemplo 7.7

Calcule a integral: $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

Efetuada a substituição $x = 2 \sin(\theta)$, temos:

$$x = 2 \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = 2 \cos(\theta) d\theta.$$

Além disso, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sqrt{4-x^2} &= \sqrt{4-4\sin^2(\theta)} \\ &= \sqrt{4\cos^2(\theta)} \end{aligned}$$

$$= 2|\cos(\theta)|.$$

Podemos restringir os valores do ângulo θ ao intervalo $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, uma vez que, como nesse intervalo $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$, pela substituição $x = 2\sin(\theta)$, vale a condição $-2 \leq x \leq 2$. Além disso, nesse intervalo, sabemos, também, que $\cos(\theta) \geq 0$. Logo, $|\cos(\theta)| = \cos(\theta)$. A integral, então, fica:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{1}{2\cos(\theta)} \cdot 2\cos(\theta) d\theta \\ &= \int d\theta = \theta + C. \end{aligned}$$

Voltando à variável original:

$$x = 2\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Portanto, a forma final da integral é:

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C.}$$

Deixo uma observação especial àquele leitor mais atento que percebeu que essa integral poderia ter sido resolvida de forma mais direta pela substituição $u = x/2$, na qual a integral se tornaria:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= \arcsin(u) + C \\ &= \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Nem toda integral, no entanto, poderá ser resolvida por substituição simples e irá demandar o uso da substituição trigonométrica.

Exemplo 7.8

Calcule a integral: $\int_3^{3\sqrt{3}} \frac{1}{9+x^2} dx$.

O primeiro ponto a ser notado é que realizar a substituição semelhante à do Exemplo 7.7, ou seja, $x = 3\sin(\theta)$, não gerará nenhum resultado interessante. Não tem algo de errado com ela, mas ela simplesmente não nos ajuda no processo

de simplificar o integrando. Veja:

$$9 + x^2 = 9 + (3 \sin(\theta))^2 = 9(1 + \sin^2(\theta)).$$

Então, cabe a nós, ainda dentro do universo das substituições trigonométricas, pensar em alguma que seja mais interessante. Uma relação advinda diretamente da Relação Fundamental da Trigonometria, ao dividir todos os termos por $\cos^2(\theta)$, é:

$$\boxed{\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta).} \quad (7.17)$$

Como temos $9 + x^2$, fazemos a seguinte substituição:

$$x = 3 \tan(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = 3 \sec^2(\theta) d\theta.$$

Assim, a integral fica:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{9 + x^2} dx &= \int \frac{1}{9(1 + \tan^2(\theta))} \cdot 3 \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \int \frac{3 \sec^2(\theta)}{9 \sec^2(\theta)} d\theta \\ &= \int \frac{1}{3} d\theta \\ &= \frac{\theta}{3} + C. \end{aligned}$$

Voltando à variável original, temos:

$$x = 3 \tan(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{x}{3}\right).$$

Portanto, a integral indefinida é:

$$\int \frac{1}{9 + x^2} dx = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

Agora, aplicando os limites de integração, ficamos com:

$$\begin{aligned} \int_3^{3\sqrt{3}} \frac{1}{9 + x^2} dx &= \frac{1}{3} \left[\arctan\left(\frac{x}{3}\right) \right]_3^{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{3} \left[\arctan\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right) - \arctan\left(\frac{3}{3}\right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4\pi - 3\pi}{12} \\ &= \frac{\pi}{36}. \end{aligned}$$

Portanto, o valor final da integral é:

$$\int_3^{3\sqrt{3}} \frac{1}{9+x^2} dx = \frac{\pi}{36}.$$

Exemplo 7.9

Calcule a integral: $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$.

Isolando o termo $\tan^2(\theta)$ na Equação (7.17), temos:

$$\tan^2(\theta) = \sec^2(\theta) - 1.$$

Como a expressão do problema é $\sqrt{x^2-4}$, fazendo uma adaptação com relação ao Exemplo 7.8, podemos realizar a substituição $x = 2\sec(\theta)$, limitando o ângulo θ aos intervalos $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $\pi \leq \theta \leq 3\pi/2$ de maneira que teremos:

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\sec^2(\theta)-4} = \sqrt{4(\sec^2(\theta)-1)} = 2\tan(\theta).$$

Além disso, efetuando a derivação, temos:

$$x = 2\sec(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = 2\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta.$$

Substituindo na integral, ficamos com:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx &= \int \frac{2\tan(\theta)}{2\sec(\theta)} \cdot 2\sec(\theta)\tan(\theta) d\theta \\ &= 2 \int \tan^2(\theta) d\theta \\ &= 2 \int (\sec^2(\theta) - 1) d\theta \\ &= 2\tan(\theta) - 2\theta + C. \end{aligned}$$

O passo final é voltar para a variável original x . Podemos fazer isso algebricamente, através das identidades trigonométricas, como segue:

$$x = 2\sec(\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{2}{x} \quad ; \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \quad ; \quad \tan(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}.$$

No entanto, uma sugestão interessante para facilitar a visualização e obtenção de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ e $\tan(\theta)$ é montar um triângulo retângulo que satisfaça à condição sugerida inicialmente, $x = 2\sec(\theta)$, como mostra a Figura 7.3.

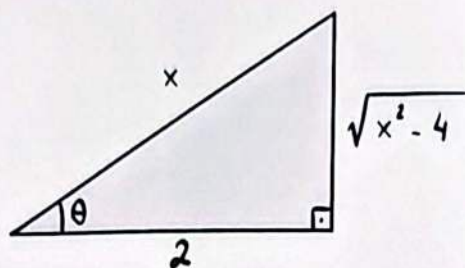


Figura 7.3: Triângulo retângulo tal que $x = 2 \sec(\theta)$.

Com esse triângulo, é imediato que:

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{x}\right) \quad \text{e} \quad \tan(\theta) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}.$$

Uma observação relevante é perceber que o triângulo é meramente ilustrativo, uma vez que x pode assumir valores negativos e o ângulo θ pode ser maior que $\pi/2$. Ele simplesmente traduz e facilita todo o algebrismo trigonométrico utilizado. Assim, a integral no seu formato final fica:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx = \sqrt{x^2 - 4} - 2 \arccos\left(\frac{2}{x}\right) + C.$$

7.5 Integração de Funções Racionais

Outro caso bastante comum para o qual devemos estar preparados é quando queremos integrar uma *função racional*, ou seja, uma função na qual tenhamos uma razão de funções polinomiais. Diversas são essas situações e algumas das mais simples são exemplificadas a seguir:

$$\int \frac{1}{2x+7} dx \quad ; \quad \int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx \quad ; \quad \int \frac{x-3}{x^2 - 6x + 5} dx.$$

Uma atenção especial deve ser dada à primeira, cujo denominador é uma função afim. Ela, como visto na Seção 7.2, pode ser facilmente resolvida utilizando a técnica da Integração por Substituição. Relacionando as variáveis u e x por:

$$u = 2x + 7 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2},$$

a integral pode ser resolvida como segue:

$$\int \frac{1}{2x+7} dx = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2} du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\
&= \frac{1}{2} \ln|u| + C \\
&= \frac{1}{2} \ln|2x + 7| + C.
\end{aligned}$$

Pois bem, nenhuma novidade até o momento. No entanto, veja que os outros casos exemplificados não podem ser resolvidos com a mesma estratégia. Você não conseguirá escrever todos os termos em função de u (sugiro que o leitor tente, para entender a dificuldade que encontrará). É nesse momento que vamos lançar mão de uma nova ferramenta: as **Frações Parciais**.

7.5.1 Integração por Frações Parciais

Com o intuito de sermos capazes de resolver não só as integrais exemplificadas acima, mas também muitas outras utilizaremos uma estratégia chamada *Decomposição em Frações Parciais*.

Frações Parciais nada mais é do que uma técnica para reescrevermos uma função racional (uma única fração) de maneira decomposta, ou seja, como o próprio nome já indica, em mais de uma fração. Reforço que, nesse momento, não estamos falando de Cálculo, apenas de um simples algebrismo. Por isso, esqueça as integrais por alguns instantes. Vejamos um caso de aplicação dessa técnica:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} = \frac{3x-5}{x^2-4x+3}. \quad (7.18)$$

É fácil ver que a equação acima está correta, basta desenvolver a expressão do lado esquerdo e ver que ele deságua no lado direito.

Então, supondo que quiséssemos integrar essa função, teríamos uma integral que não seria imediata. No entanto, pela igualdade acima, poderíamos escrever:

$$\int \frac{3x-5}{(x-1)(x-3)} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{x-3} dx.$$

A vantagem de fazer essa decomposição reside no fato de que a integral à esquerda não é trivial, mas as integrais decompostas à direita são e, como consequência, podem ser resolvidas de maneira imediata como segue:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x-5}{(x-1)(x-3)} dx &= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{x-3} dx \\
&= \ln|x-1| + 2\ln|x-3| + C.
\end{aligned}$$

Fica clara, portanto, a importância da decomposição em frações parciais. Esse é apenas um exemplo motivador da aplicação dessa ferramenta. Diversos outros casos podem aparecer, como denominadores de grau superior e até mesmo casos em que não é possível fatorá-los completamente. Todos esses casos são tratados em detalhes no Apêndice C.

Exemplo 7.10

Calcule a integral: $\int \frac{7+x}{2+x-x^2} dx$.

Vamos resolver essa integral utilizando a decomposição em frações parciais. Primeiro, reescrevemos o denominador:

$$2+x-x^2 = -(x^2-x-2) = -(x-2)(x+1).$$

Assim, a integral fica:

$$-\int \frac{7+x}{(x-2)(x+1)} dx.$$

Fazendo a decomposição em frações parciais, temos:

$$\frac{7+x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}.$$

Multiplicando ambos os lados por $(x-2)(x+1)$:

$$7+x = A(x+1) + B(x-2). \quad (7.19)$$

Determinar os valores de A e B é uma tarefa braçal e pode ser feita basicamente de duas maneiras distintas: igualando os polinômios ou escolhendo valores convenientes para x . Ambos os métodos são detalhados no Apêndice C, portanto, adianto ao leitor que essa é a última vez que detalharemos os cálculos dos coeficientes. Nos exemplos posteriores essa etapa será omitida. Optando pelo segundo método e aplicando valores de x na Equação (7.19), teremos:

$$\begin{aligned} x = -1; & \quad \Rightarrow \quad 6 = A \cdot 0 + B \cdot (-3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = -2}, \\ x = 2; & \quad \Rightarrow \quad 9 = A \cdot 3 + B \cdot (0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 3}. \end{aligned}$$

Ou seja, a decomposição nos permite escrever:

$$\frac{7+x}{(x-2)(x+1)} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1}.$$

Assim, podemos reescrever a integral como:

$$\begin{aligned} \int \frac{7+x}{2+x-x^2} dx &= -\left(\int \frac{3}{x-2} dx + \int \frac{-2}{x+1} dx \right) \\ &= -3 \int \frac{1}{x-2} dx + 2 \int \frac{1}{x+1} dx. \end{aligned}$$

Essas integrais são imediatas e o resultado final é:

$$\boxed{\int \frac{7+x}{2+x-x^2} dx = -3 \ln|x-2| + 2 \ln|x+1| + C.}$$

Exemplo 7.11

Calcule a integral: $\int \frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx$,

Primeiramente, vamos fatorar o denominador:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

Essa já não é uma expressão trivial de se fatorar. Como dito, discutir e esmiuçar a fatoração não é o nosso foco, assim já lhe adianto que o denominador pode ser escrito como:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x - 2).$$

O integrando, então, pode ser escrito, decomposto em frações parciais, como:

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{(x - 1)^2(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 2}.$$

Observe a presença de um termo linear e de um termo quadrático entre os denominadores. Os detalhes dessa fatoração se encontram no Apêndice C.

Multiplicando ambos os lados por $(x - 1)^2(x - 2)$, obtemos:

$$x^2 - 2x + 4 = A(x - 1)(x - 2) + B(x - 2) + C(x - 1)^2.$$

Para honrar as calças que visto, omitiremos os cálculos, mas dou garantia ao leitor de que $A = -3$, $B = -3$ e $C = 4$ — os quais ele pode verificar por si mesmo — e, de posse desses valores, podemos reescrever a integral como:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx &= \int \frac{-3}{x - 1} dx + \int \frac{-3}{(x - 1)^2} dx + \int \frac{4}{x - 2} dx \\ &= -3 \int \frac{1}{x - 1} dx - 3 \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx + 4 \int \frac{1}{x - 2} dx. \end{aligned}$$

O primeiro e terceiro termos são imediatos:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x - 1} dx &= \ln|x - 1| + C, \\ \int \frac{1}{x - 2} dx &= \ln|x - 2| + C. \end{aligned}$$

O segundo termo, também, pode ser calculado facilmente fazendo uma substituição simples, como segue:

$$u = x - 1 \quad \Rightarrow \quad du = dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)^2} dx &= \int \frac{1}{u^2} du \\ &= -\frac{1}{u} + C \\ &= -\frac{1}{x-1} + C.\end{aligned}$$

Portanto, o resultado final é:

$$\int \frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx = -3 \ln|x-1| + \frac{3}{x-1} + 4 \ln|x-2| + C.$$

7.6 Integrais Impróprias

A essa altura já foram apresentadas ao leitor praticamente todas as ferramentas que ele precisa para resolver integrais de qualquer natureza. No entanto, até o presente momento, duas situações específicas ainda não ocorreram. Ambas estão relacionadas com o *infinito*:

- (i) Integrar quando os limites de integração forem ∞ ou $-\infty$;
- (ii) Integrar quando a função tender ao infinito em algum ponto na região de integração.

Nossa missão na presente seção é justamente aprender a lidar com o infinito nas integrais. Em certa medida, estamos extrapolando o TFC para casos que não eram abrangidos inicialmente. Essas integrais são denominadas *integrais impróprias*.

7.6.1 Intervalo contendo o infinito

Já sabemos que integrar é muito mais do que apenas calcular áreas abaixo de curvas. No entanto, atribuir esse significado será bastante útil para tornar o processo atual mais intuitivo e visual.

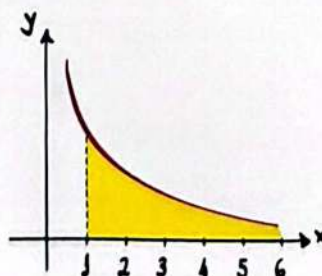


Figura 7.4: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Suponha que desejemos calcular a área A entre o eixo x e a curva $f(x) = 1/x^2$ a partir de $x = 1$ até quando $x \rightarrow \infty$. Essa situação está representada, parcialmente, na Figura 7.4.

O primeiro pensamento que tive ao me deparar com tal problema foi: “É claro que a área é infinita”. Parece ser verdade, não acha? Estamos calculando uma área que se estende até o infinito. O gráfico da função $f(x)$ nunca intercepta o eixo x , portanto, sempre haverá uma região entre a curva e o eixo x , aumentando a área à medida que caminhamos para a direita. Como não há limite para a direita, uma vez que $x \rightarrow \infty$, concluiríamos que a área é infinita. Contudo, digo-lhe que isso não é verdade, apesar de intuitivo.

Antes de seguirmos para a parte mais formal, esse problema me remete ao que considero ser o maior matemático de todos os tempos: *Leonhard Euler*. Foi ele o primeiro matemático que, em 1734, deu solução ao famoso **problema de Basel**. Esse problema estava em aberto há quase 100 anos e consistia em determinar o valor da soma dos inversos dos quadrados de todos os naturais, ou seja, determinar o valor da expressão:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Para resolver esse problema, Euler usou a representação de funções por séries infinitas para representar a função seno. Essas ferramentas matemáticas utilizadas por ele fogem do escopo do presente livro, (porém, certamente serão trabalhadas a fundo nos próximos volumes) mas, com elas, ele chegou ao elegantíssimo resultado:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (7.20)$$

Hoje existem várias demonstrações dessa igualdade, através de diferentes abordagens. Entretanto, qual é a relação entre esse problema de Basel e o cálculo da área abaixo da curva?

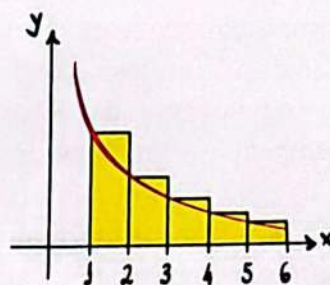


Figura 7.5: Área abaixo da curva da função $f(x) = 1/x^2$ aproximada por retângulos.

A Figura 7.5 mostra o gráfico da função $f(x) = 1/x^2$. A partir de $x = 1$ estão representados retângulos de base com comprimento 1 e cujas alturas h_n são determinadas pela própria curva, ou seja,

$$h_1 = f(1) = \frac{1}{1^2} ; \quad h_2 = f(2) = \frac{1}{2^2} ; \quad h_3 = f(3) = \frac{1}{3^2} ; \quad \cdots$$

Então, as áreas, aqui denominadas por B_n , desses retângulos serão dadas por:

$$B_1 = 1 \ ; \ B_2 = \frac{1}{4} \ ; \ B_3 = \frac{1}{9} \ ; \ B_4 = \frac{1}{16} \ ; \ \dots$$

Assim, é fácil ver, utilizando o resultado da Equação (7.20), que a soma B das áreas desses retângulos é:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + \dots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,65.$$

Agora, prepare-se para o ponto principal do argumento, caro leitor: **essa área superestima a área abaixo da curva!** Isso é facilmente observável na Figura 7.5. A curva fica abaixo dos retângulos ao longo de todo o domínio da função. Com esse argumento, fica claro que a área procurada A é menor que a área calculada B , ou seja,

$$A < B = \frac{\pi^2}{6}.$$

Portanto, apesar ser um pouco contra-intuitivo, mesmo a figura tendo uma **extensão infinita**, área A abaixo da curva da função $f(x) = 1/x^2$ é **finita**, sendo então passível de ser calculada. É exatamente isso que faremos a partir de agora.

Essa área seria dada por:

$$A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_1^{\infty} = -\left(\frac{1}{x} \right) \Big|_1^{\infty} = -\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1} \right).$$

O leitor poderia, nesse momento, argumentar que $1/\infty = 0$. Sinceramente, eu lhe entendo, e, de maneira bastante informal, está até correto o raciocínio. No entanto, precisamos ter um certo cuidado ao lidar com o infinito e, também, ao escrever expressões que contenham o infinito. Sempre que estivermos lidando com situações que o envolvam, de alguma maneira, iremos utilizar o conceito de **limite**. Pode parecer uma tecnicidade desnecessária no momento, mas não só é a maneira formal e correta de escrever, como também desempenhará um papel importante no entendimento do que faremos posteriormente.

Então, quando houver o ∞ no lugar de um limite de integração, essa integral será escrita em termos de um limite, como segue:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\left(\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{1} \right) = -(0 - 1) = 1. \end{aligned}$$

Analogamente, se desejássemos calcular a área abaixo da curva dessa mesma função $f(x) = 1/x^2$, mas agora do $x = -1$ para a esquerda, poderíamos proceder de

maneira semelhante como segue:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_a^{-1} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} -\left(\frac{1}{x}\right) \Big|_a^{-1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} -\left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{a}\right) = -(-1 - 0) = 1. \end{aligned}$$

Claro, dada a simetria da função $f(x)$ e a simetria dos pontos em relação aos quais integramos, a área é precisamente igual. Veja que a área A , como esperado, foi menor do que as áreas dos retângulos que a superestimavam:

$$1 < \frac{\pi^2}{6}.$$

Nesse caso em que a área debaixo do gráfico foi finita, dizemos que essa integral é **convergente**, mas nem sempre isso acontece. Vejamos um outro caso clássico.

Suponha que, dessa vez, desejemos calcular a área abaixo da curva $f(x) = 1/x$, também, a partir de $x = 1$. Repetindo exatamente o mesmo processo anterior, podemos calcular essa área por:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(b) - \ln(1)) = \infty - 0 = \infty. \end{aligned}$$

Ou seja, dessa vez, o limite foi ao infinito, indicando que a área abaixo da curva é infinita. Nesse caso, dizemos que a integral é **divergente**.

Podemos, então, resumir o que estudamos da seguinte maneira:

Integrais Impróprias - Infinito à direita ou à esquerda

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, \infty)$. Então,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Seja $f(x)$ uma função contínua em $(-\infty, b]$. Então,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Quando o limite existe, a integral é dita *convergente*. Caso contrário, ela é dita *divergente*.

Exemplo 7.12

Calcule a integral: $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$.

Podemos resolver a integral imprópria com limite superior infinito definindo:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx \\ \int_0^b e^{-x} dx &= [-e^{-x}]_0^b = -e^{-b} + e^0 = -e^{-b} + 1.\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $b \rightarrow \infty$: $\lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) = 0 + 1 = 1$.
Portanto, o valor da integral é:

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.}$$

Essa integral representa a área destacada na Figura 7.6.

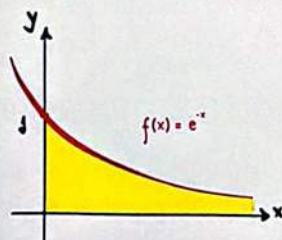


Figura 7.6: Gráfico da função $f(x) = e^{-x}$ e a área procurada.

Exemplo 7.13

Calcule a integral: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Primeiramente, repare que essa integral se diferencia daquelas que trabalhamos até o momento, pois, nessa, ambos os limites de integração envolvem o infinito, ou seja, o domínio de integração é $(-\infty, \infty)$. Dessa maneira, é conveniente dividirmos essa integral em duas, como segue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \quad (7.21)$$

e, em seguida, resolver cada uma delas exatamente da maneira que temos feito nos casos anteriores. É importante ressaltar que o valor de c é totalmente arbitrário, e o estudante pode escolher o que lhe for mais conveniente. A Figura 7.7 ilustra essa situação para $c = -2$ e $c = 1$, escolhidos arbitrariamente.

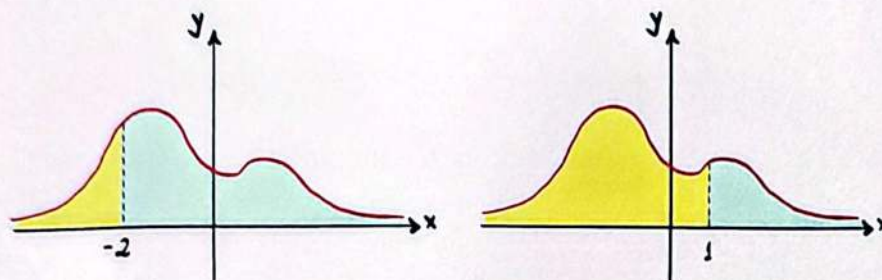


Figura 7.7: Integral de uma função no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Voltando ao problema do exemplo, esta integral é um clássico exemplo de uma integral imprópria simétrica e é comumente encontrada em problemas de Física, por exemplo.

Primeiramente, notamos que a função $f(x) = 1/(1+x^2)$ é par, ou seja, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y , dado que $f(-x) = f(x)$. Isso faz com que a melhor escolha seja $c = 0$, pois dessa maneira conseguimos aproveitar a simetria, uma vez que

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Então, podemos avaliar a integral desejada resolvendo apenas uma integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

A Figura 7.8 representa a situação.

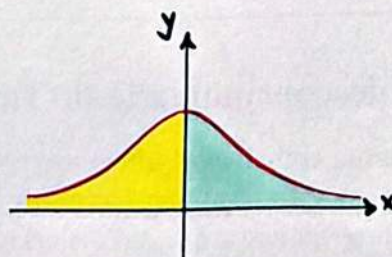


Figura 7.8: Gráfico da função $f(x) = 1/(x^2 + 1)$.

Daqui em diante é apenas execução, sem mais novidades. Repare que, mais uma vez, a função do integrando é conhecida, de modo que sabemos de antemão que

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C.$$

Assim, aplicando os limites de 0 até ∞ , temos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(x) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan(b) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, o valor da integral é o dobro do valor encontrado, ou seja,

$$\boxed{\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.}$$

Fica como sugestão que o leitor calcule a mesma integral, mas agora com $c = 1$, ou seja,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Vale, então, ressaltar o caso trabalhado, no qual queremos integrar no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Integrais Impróprias – Infinito à direita e à esquerda

Seja $f(x)$ uma função contínua em $(-\infty, \infty)$. Então,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx,$$

onde c é um valor arbitrário. Quando ambos os limites existem, a integral é dita *convergente*. Caso contrário, ela é dita *divergente*.

7.6.2 Funções com descontinuidade do tipo infinito

Na subseção anterior, foram trabalhadas integrais cujos limites de integração se estendiam até o infinito. No entanto, esse não é o único tipo de integral imprópria que existe. Gostaria de lembrar ao leitor que, ao enunciar o TFC, assumimos como premissa o fato de que a função $f(x)$ a ser integrada deveria ser contínua. Essa subseção irá, em certa medida, complementar o TFC. Será mostrado a seguir que algumas funções, mesmo descontínuas, podem, sim, ser integradas. Para ilustrar, consideremos a função $f(x) = 1/\sqrt{x}$, cujo gráfico é mostrado na Figura 7.9.

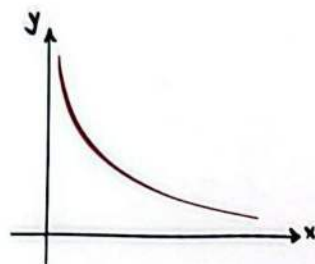


Figura 7.9: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Veja que essa função apresenta uma descontinuidade do tipo infinito em $x = 0$, uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty,$$

ou seja, o eixo y é uma assíntota vertical dessa função. Dessa maneira, a princípio, não poderíamos integrá-la. Porém, a realidade é que podemos: se podemos integrar funções com assíntotas horizontais, por quais motivos não poderíamos integrar aquelas com assíntotas verticais?

Antes de continuar, algo que talvez intrigue ou mesmo confunda o leitor são as várias funções semelhantes com as quais temos trabalhado, a dizer:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Vimos que a função $f(x) = 1/x^2$ converge no intervalo $[1, \infty)$, enquanto a função $f(x) = 1/x$ diverge. Agora trabalharemos com a função $f(x) = 1/\sqrt{x}$ e, com o intuito de esclarecer essa possível dúvida, a Figura 7.10 mostra o gráfico dessas três funções. A principal característica a ser destacada é que, quanto maior o expoente, mais rápido a função converge para zero à medida que o valor de x aumenta. Daí o fato de a área abaixo da função $f(x) = 1/x^2$ ser finita e da função $f(x) = 1/x$ ser infinita.

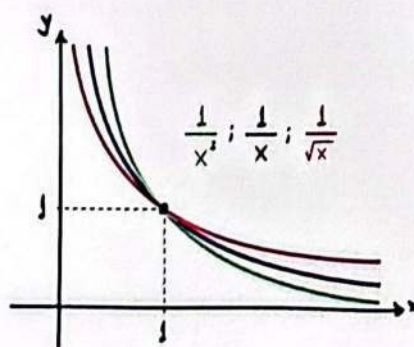


Figura 7.10: Comparação entre funções semelhantes.

Dito isso, voltemos à função $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Se quisermos integrar essa função no intervalo $(0, 1]$, precisaremos lançar mão da ferramenta que utilizamos na seção anterior: o *limite*. Ou seja, poderíamos fazer:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Veja que o limite inferior foi substituído por a e fizemos com que a tendesse a zero pela direita, ou seja, $a \rightarrow 0^+$. O fato de ser um limite lateral é relevante, conforme discutimos no Capítulo 3. Dessa maneira, a integral se torna um problema comum de limite:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left. \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_a^1 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2(\sqrt{1} - \sqrt{a}) = 2. \end{aligned}$$

O resultado dessa integral equivale à área abaixo da curva mostrada na Figura 7.11.

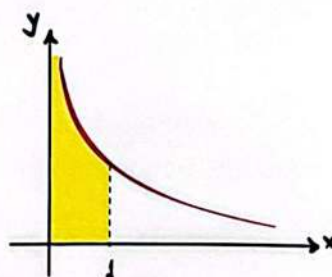


Figura 7.11: Região abaixo da curva $f(x) = 1/\sqrt{x}$ no intervalo $(0, 1]$ cuja área $A = 2$.

Vale destacar alguns pontos de atenção:

Presença de descontinuidades: Integrar funções sem prestar atenção em possíveis descontinuidades pode gerar erros absurdos.

Limites laterais de integração: Observar o ponto de descontinuidade e o intervalo de integração, com o intuito de escolher o limite lateral correto.

A Figura 7.12 mostra uma interpretação geométrica dessas integrais impróprias. Podemos enunciar esse outro tipo de integral imprópria como segue:

Integrais Impróprias – Função descontínua em $x = c$

Seja um intervalo real $[a, b]$ e $f(x)$ uma função com descontinuidade do tipo infinito em $x = c$, tal que $a < c < b$. Nesse caso, podemos escrever as integrais:

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx.$$

$$\int_c^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x) dx.$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x) dx.$$

Quando o limite existir, a integral é dita *convergente*. Caso contrário, ela é dita *divergente*.

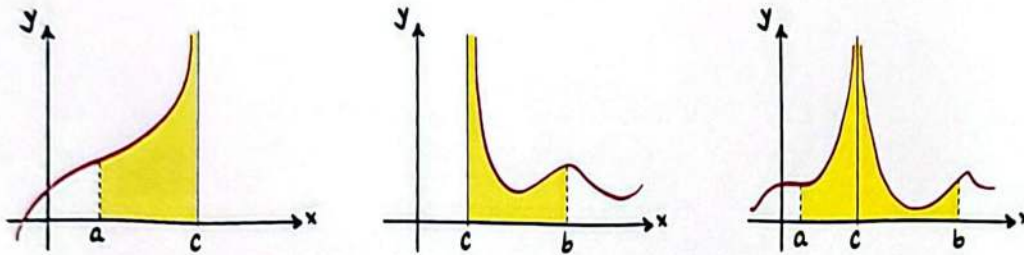


Figura 7.12: Visualização da integração de funções descontínuas em $x = c$.

Exemplo 7.14

Calcule o valor da integral: $\int_1^4 \frac{1}{x-2} dx$.

O erro mais comum nesse tipo de problema, como já adiantei, é o estudante proceder da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{x-2} dx &= \ln|x-2| \Big|_1^4 \\ &= \ln|4-2| - \ln|1-2| \\ &= \ln(2) - \ln(1) \\ &= \ln(2). \end{aligned}$$

O erro consiste em simplesmente ignorar o fato de a função ter uma descontinuidade. Repare que o denominador é $x-2$ e, por isso, a função apresenta descontinuidade em $x=2$, ou seja, a função não está definida nesse ponto. Como o intervalo de integração $[1, 4]$ compreende esse ponto, isso deve ser levado em consideração no cálculo. Então, o primeiro passo é separar a integral imprópria, como segue:

$$\int_1^4 \frac{1}{x-2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x-2} dx + \int_2^4 \frac{1}{x-2} dx.$$

Começemos resolvendo a primeira delas:

$$\int_1^2 \frac{1}{x-2} dx = \lim_{a \rightarrow 2^-} \int_1^a \frac{1}{x-2} dx = \lim_{a \rightarrow 2^-} (\ln|a-2| - \ln(1)) = -\infty.$$

Nesse ponto, já podemos encerrar o procedimento, pois o limite resultou em $-\infty$ e, com isso, já podemos dizer que a integral é **divergente**, sem importar com o que acontece com a outra parte da integral. Por mera formalidade, façamos a segunda parte:

$$\int_2^4 \frac{1}{x-2} dx = \lim_{b \rightarrow 2^+} \int_b^4 \frac{1}{x-2} dx = \lim_{b \rightarrow 2^+} (\ln(2) - \ln|b-2|) = +\infty.$$

Como dito, esse segundo resultado é absolutamente irrelevante. Tivesse ele dado ∞ , $-\infty$ ou mesmo um valor numérico finito, a conclusão não mudaria:

A integral $\int_1^4 \frac{1}{x-2} dx$ diverge.

Exemplo 7.15

Determine para quais valores reais de k a integral abaixo converge.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx.$$

Primeiramente, note que a descontinuidade ocorre em $x = 0$. Para uma análise detalhada, vamos dividi-la em casos:

- **Caso I:** $k < 0$.

Nesse caso, a descontinuidade na função desaparece, pois o x “vai para o numerador”. Por exemplo, se $k = -2$, o integrando se torna x^2 . Então, a integral é convergente.

- **Caso II:** $k = 0$.

Nesse caso, o integrando se torna 1, ou seja, uma constante, de modo que não existe mais a descontinuidade, fazendo com que a função convirja novamente.

- **Caso III:** $k = 1$.

Nesse caso, a função é $1/x$, e existe descontinuidade. Como já computado anteriormente, em tal caso a integral diverge.

- **Caso IV:** $k > 0$, $k \neq 1$.

Nesse caso, temos:

$$\int_a^1 \frac{1}{x^k} dx = \left. \frac{x^{1-k}}{1-k} \right|_a^1 = \frac{1}{1-k} - \frac{a^{1-k}}{1-k}.$$

Aplicando o limite, temos:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-k} - \frac{a^{1-k}}{1-k} \right).$$

Repare que essa expressão converge se o expoente do a for positivo, caso contrário ele tenderá ao infinito.

Assim, resumindo a análise inteira podemos dizer que para que a integral seja convergente é necessário termos $k < 1$.

7.7 Problemas

Seção 7.2 – Integração por Substituição

Problema 7.1 (*Integral de função exponencial com substituição*). Calcule a integral definida:

$$\int_0^1 e^{5x} dx.$$

Problema 7.2 (*Integral indefinida de função racional*). Calcule a integral:

$$\int \frac{1}{3-4x} dx.$$

Problema 7.3 (*Integral indefinida de fração com raiz quadrada*). Calcule a integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x+1}} dx.$$

Problema 7.4 (*Integral indefinida com produto de polinômio e raiz quadrada*). Calcule a integral:

$$\int x^3 \sqrt{x^2+2} dx.$$

Seção 7.3 – Integração por Partes

Problema 7.5 (*Integral de $x^2 e^x$ por partes*). Calcule a integral:

$$\int x^2 e^x dx.$$

Problema 7.6 (*Integral de $x \ln x$ por partes*). Calcule a integral:

$$\int x \cdot \ln(x) dx.$$

Problema 7.7 (*Integral de $x^2 \ln x$ por partes*). Calcule a integral:

$$\int x^2 \ln(x) dx.$$

Problema 7.8 (*Integral de $\arctan(x)$ por partes*). Calcule a integral:

$$\int \arctan(x) dx.$$

Problema 7.9 (*Integral de $\ln(x^2+1)$ por partes*). Calcule a integral:

$$\int \ln(x^2+1) dx.$$

Seção 7.4 – Integração por Substituição Trigonométrica

Problema 7.10 (Integral de $\frac{1}{(4-x^2)^{3/2}}$ por substituição trigonométrica). Calcule a integral:

$$\int \frac{1}{(4-x^2)^{3/2}} dx.$$

Problema 7.11 (Integral de $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$). Calcule a integral:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

Problema 7.12 (Integral de $\frac{1}{(x^2+1)^{5/2}}$). Calcule a integral:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{5/2}} dx.$$

Seção 7.5 – Integração por Frações Parciais

Problema 7.13 (Integral por frações parciais). Calcule a integral:

$$\int \frac{15x+20}{x^2+3x-4} dx.$$

Problema 7.14 (Integral por frações parciais). Calcule a integral:

$$\int \frac{16x+40}{x^3-4x} dx.$$

Problema 7.15 (Integral por frações parciais). Calcule a integral:

$$\int \frac{2x^2-2x+4}{(x+1)^2(x-3)} dx.$$

Problema 7.16 (Integral por frações parciais). Calcule a integral:

$$\int \frac{x^3+4x^2+4x-3}{x^2+x-2} dx.$$

Problema 7.17 (Integral racional com denominador quadrático irredutível). Calcule a integral:

$$\int \frac{x^2-x+1}{x^2-3x+4} dx.$$

Problema 7.18 (Integral por frações parciais). Calcule a integral:

$$\int \frac{18+4x+3x^2}{9x+x^3} dx.$$

Problema 7.19 (*Integral com radical e fração*). Calcule a integral:

$$\int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx.$$

Seção 7.6 – Integrais Impróprias

Problema 7.20 (*Integral imprópria envolvendo função exponencial*). Calcule a integral:

$$\int_1^{\infty} xe^{-x} dx.$$

Problema 7.21 (*Integral imprópria envolvendo função algébrica e racional*). Calcule a integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

Problema 7.22 (*Integral imprópria com fração racional*). Calcule a integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+1} dx.$$

Problema 7.23 (*Integral imprópria com logaritmo*). Calcule a integral:

$$\int_0^1 \ln(x) dx.$$

Problema 7.24 (*Integral imprópria com raiz no denominador*). Calcule a integral:

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Problema 7.25 (*Integral imprópria com substituição*). Calcule a integral:

$$\int_0^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx.$$

7.8 Exercícios

Seção 7.2 – Integração por Substituição

Exercício 7.26 (*Integral indefinida da função cosseno composta*). Calcule a integral:

$$\int \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx.$$

Exercício 7.27 (*Integral indefinida da função exponencial composta*). Calcule a integral:

$$\int e^{\frac{x}{5}} dx.$$

Exercício 7.28 (*Integral indefinida da função secante ao quadrado*). Calcule a integral:

$$\int \sec^2(3x) dx.$$

Exercício 7.29 (*Integral indefinida de função trigonométrica*). Calcule a integral:

$$\int \cos(7x) dx.$$

Exercício 7.30 (*Integral indefinida com raiz e polinômio de quarto grau*). Calcule a integral:

$$\int 20x^3 \sqrt{2x^4 + 1} dx.$$

Exercício 7.31 (*Integral definida da tangente*). Calcule a integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan(3x) dx.$$

Exercício 7.32 (*Integral indefinida com função trigonométrica composta de terceiro grau*). Calcule a integral:

$$\int x^2 \cos(x^3 + 4) dx.$$

Exercício 7.33 (*Integral indefinida com função composta e polinômio cúbico*). Calcule a integral:

$$\int x^3 \sqrt{x^2 + 5} dx.$$

Exercício 7.34 (*Integral definida com raiz quadrada no denominador*). Calcule a integral:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx.$$

Exercício 7.35 (*Integral definida da raiz quadrada*). Calcule a integral:

$$\int_0^1 \sqrt{4x+1} dx.$$

Exercício 7.36 (*Integral com raiz no denominador*). Calcule a integral:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx.$$

Exercício 7.37 (*Integral indefinida com função seno composta*). Calcule a integral:

$$\int x \sin(x^2 + 5) dx.$$

Seção 7.3 - Integração por Partes

Exercício 7.38 (*Integral de $x^2 \cos(x)$ por partes*). Calcule a integral:

$$\int x^2 \cdot \cos(x) dx.$$

Exercício 7.39 (*Integral de $x \arctan(x)$ por partes*). Calcule a integral:

$$\int x \cdot \arctan(x) dx.$$

Exercício 7.40 (*Integral de xe^{2x} por partes*). Calcule a integral:

$$\int x \cdot e^{2x} dx.$$

Exercício 7.41 (*Integral de $e^x \ln(x)$ por partes*). Calcule a integral:

$$\int e^x \cdot \ln(x) dx.$$

Exercício 7.42 (*Integral de $e^x \sin(x)$ por partes*). Calcule a integral:

$$\int e^x \cdot \sin(x) dx.$$

Exercício 7.43 (*Integral de $\ln(x) \sin(x)$ por partes*). Calcule a integral:

$$\int \ln(x) \cdot \sin(x) dx.$$

Exercício 7.44 (*Integral de $x^2 \sin(x)$ por partes*). Calcule a integral:

$$\int x^2 \cdot \sin(x) dx.$$

Exercício 7.45 (*Integral de xe^{-x} por partes*). Calcule a integral:

$$\int x \cdot e^{-x} dx.$$

Seção 7.4 – Integração por Substituição Trigonométrica

Exercício 7.46 (Integral de $\frac{1}{(x^2+25)^{3/2}}$). Calcule a integral:

$$\int \frac{1}{(x^2 + 25)^{3/2}} dx.$$

Exercício 7.47 (Integral de $\sqrt{16-x^2}$). Calcule a integral:

$$\int \sqrt{16 - x^2} dx.$$

Exercício 7.48 (Integral de $\frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}$). Calcule a integral:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 9}} dx.$$

Seção 7.5 – Integração por Frações Parciais

Exercício 7.49 (Integral por frações parciais). Calcule a integral:

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 4}{(x-1)(x+4)} dx.$$

Exercício 7.50 (Integral por frações parciais). Calcule a integral:

$$\int \frac{10x + 15}{(x-3)(x+2)} dx.$$

Exercício 7.51 (Integral por frações parciais). Calcule a integral:

$$\int \frac{16x + 24}{(x-1)(x+3)(x-3)} dx.$$

Exercício 7.52 (Integral por frações parciais). Calcule a integral:

$$\int \frac{9x + 3}{(x-1)(x+1)(x-2)} dx.$$

Exercício 7.53 (Integral por frações parciais). Calcule a integral:

$$\int \frac{3x + 5}{(x+1)(x-3)^2} dx.$$

Exercício 7.54 (*Integral por frações parciais*). Calcule a integral:

$$\int \frac{3x^2 - x}{x^3 - x^2 + x - 1} dx.$$

Exercício 7.55 (*Integral por frações parciais*). Calcule a integral:

$$\int \frac{3x + 5}{(x - 1)(x - 2)^2} dx.$$

Seção 7.6 – Integrais Impróprias

Exercício 7.56 (*Integral imprópria de função racional com expoente negativo*). Calcule a integral:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3} dx.$$

Exercício 7.57 (*Integral imprópria com descontinuidade fora do intervalo*). Calcule a integral:

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{(x - 1)^2} dx.$$

Exercício 7.58 (*Integral imprópria com limite inferior infinito*). Calcule a integral:

$$\int_{-\infty}^1 e^{2x} dx.$$

Exercício 7.59 (*Integral imprópria e fração parcial*). Calcule a integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx.$$

Exercício 7.60 (*Integral imprópria com expoente fracionário negativo*). Calcule a integral:

$$\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}} dx.$$

Exercício 7.61 (*Integral imprópria com raiz no denominador*). Calcule a integral:

$$\int_{-4}^0 \frac{1}{\sqrt{x + 3}} dx.$$

Exercício 7.62 (*Integral imprópria com raiz cúbica no denominador*). Calcule a integral:

$$\int_{-4}^8 \frac{1}{(x + 3)^{1/3}} dx.$$

Exercício 7.63 (*Integral imprópria com descontinuidade no denominador*). Calcule a integral:

$$\int_1^4 \frac{1}{2x - 4} dx.$$

7.9 Resoluções dos Problemas

Seção 7.2 – Integração por Substituição

Problema 7.1

Vamos resolver essa integral utilizando o método da substituição. Seja:

$$u = 5x \Rightarrow dx = \frac{1}{5} du.$$

Substituindo na integral (sem mudar os limites por enquanto):

$$\begin{aligned} \int e^{5x} dx &= \int e^u \frac{1}{5} du \\ &= \frac{1}{5} \int e^u du \\ &= \frac{1}{5} e^u + C. \end{aligned}$$

Voltando à variável original:

$$\frac{1}{5} e^{5x} + C.$$

Agora, aplicando os limites de integração $x = 0$ e $x = 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{5x} dx &= \left[\frac{1}{5} e^{5x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} e^5 - \frac{1}{5} e^0 \\ &= \frac{1}{5} (e^5 - 1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\int_0^1 e^{5x} dx = \frac{1}{5} (e^5 - 1).}$$

Problema 7.2

Vamos usar o método da substituição, fazendo:

$$u = 3 - 4x \Rightarrow dx = -\frac{1}{4} du.$$

Substituindo na integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3-4x} dx &= \int \frac{1}{u} \cdot \left(-\frac{1}{4} du \right) \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du \\ &= -\frac{1}{4} \ln|u| + C. \end{aligned}$$

Voltando à variável original, temos:

$$\int \frac{1}{3-4x} dx = -\frac{1}{4} \ln|3-4x| + C.$$

Problema 7.3

Considere a substituição:

$$u = 5x + 1 \Rightarrow dx = \frac{1}{5} du.$$

Substituindo na integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{5x+1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{5} du \\ &= \frac{1}{5} \int u^{-1/2} du \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C \\ &= \frac{1}{5} \cdot 2\sqrt{u} + C \\ &= \frac{2}{5} \sqrt{u} + C. \end{aligned}$$

Voltando à variável original, temos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x+1}} dx = \frac{2}{5} \sqrt{5x+1} + C.$$

Problema 7.4

Usando o método da substituição, podemos fazer:

$$u = x^2 + 2 \Rightarrow du = 2x dx.$$

Temos $x^3 dx = x^2 \cdot x dx$. Como $x^2 = u - 2$ e $x dx = \frac{1}{2} du$, então:

$$x^3 dx = (u - 2) \cdot \frac{1}{2} du.$$

Substituindo na integral:

$$\begin{aligned}
 \int x^3 \sqrt{x^2 + 2} \, dx &= \int (u - 2) \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} \, du \\
 &= \frac{1}{2} \int (u - 2) u^{1/2} \, du \\
 &= \frac{1}{2} \int (u^{3/2} - 2u^{1/2}) \, du \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{u^{5/2}}{5/2} - 2 \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} \right) + C \\
 &= \frac{1}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2} + C.
 \end{aligned}$$

Voltando à variável x :

$$\boxed{\int x^3 \sqrt{x^2 + 2} \, dx = \frac{1}{5} (x^2 + 2)^{5/2} - \frac{2}{3} (x^2 + 2)^{3/2} + C.}$$

Seção 7.3 – Integração por Partes

Problema 7.5

Esse é um caso bem interessante, como veremos a seguir. Usaremos o método da integração por partes. Pela regra do **LIATE**, escolhemos:

$$\begin{array}{lll}
 u = x^2 & \Rightarrow & du = 2x \, dx, \\
 dv = e^x \, dx & \Rightarrow & v = e^x.
 \end{array}$$

Aplicando a fórmula da integral por partes:

$$\int x^2 \cdot e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx.$$

Observe que continuamos com um problema, já que a integral remanescente continua com um produto de uma função algébrica (x) e uma exponencial (e^x). No entanto, o problema foi reduzido, uma vez que a parcela algébrica teve sua potência reduzida de 2 para 1. Assim, poderíamos aplicar novamente o método da integração por partes para resolver a integral $\int 2x \cdot e^x \, dx = 2 \int x \cdot e^x \, dx$. Isso não daria muito trabalho, mas essa é a exata integral que resolvemos no Exemplo 7.5, e, portanto, já sabemos que:

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + C.$$

Voltando à integral original:

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \cdot e^x \, dx &= x^2 \cdot e^x - 2(x \cdot e^x - e^x) + C \\
 &= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C.
 \end{aligned}$$

Portanto, o resultado final é:

$$\int x^2 \cdot e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

Problema 7.6

A função logarítmica é a prioritária para ser a função u . Assim, fazemos:

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx,$$

$$dv = x dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Aplicando a fórmula da integral por partes:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado final é:

$$\int x \cdot \ln x dx = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C.$$

Problema 7.7

Vamos resolver essa integral utilizando o método de integração por partes.

Pela regra **LIATE**, damos preferência para escolher $u = \ln x$, deixando o termo algébrico x^2 para dv . Assim, fazemos:

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx,$$

$$dv = x^2 dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^3}{3}.$$

Aplicando a fórmula da integral por partes:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \ln x dx &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} + C. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado final é:

$$\int x^2 \cdot \ln x \, dx = \frac{x^3}{9} (3 \ln x - 1) + C.$$

Problema 7.8

Esse é um caso mais sutil, mas pode ser, também, resolvido pela integração por partes fazendo:

$$\begin{aligned} u &= \arctan x & \Rightarrow & & du &= \frac{1}{1+x^2} dx, \\ dv &= dx & \Rightarrow & & v &= x. \end{aligned}$$

Aplicando a integração por partes, fica:

$$\int \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx.$$

A integral $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ pode ser resolvida por substituição simples. Seja:

$$u = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x \, dx \quad \Rightarrow \quad x \, dx = \frac{1}{2} du.$$

Substituindo:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Voltando à integral original, chegamos ao resultado final:

$$\int \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Problema 7.9

Esse, também, é um caso bastante interessante, que pode ser resolvido por integração por partes como segue:

$$\begin{aligned} u &= \ln(x^2 + 1) & \Rightarrow & & du &= \frac{2x}{x^2 + 1} dx, \\ dv &= dx & \Rightarrow & & v &= x. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula da integral por partes:

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 1) \, dx &= x \cdot \ln(x^2 + 1) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ &= x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

Observe que:

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx &= \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= x - \arctan x. \end{aligned}$$

Voltando à integral original:

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 1) dx &= x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2(x - \arctan x) + C \\ &= x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctan x + C. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado final é:

$$\boxed{\int \ln(x^2 + 1) dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctan x + C.}$$

Seção 7.4 - Integração por Substituição Trigonométrica

Problema 7.10

Como temos $\sqrt{4 - x^2}$, usamos a substituição trigonométrica:

$$x = 2 \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = 2 \cos(\theta) d\theta.$$

Sabemos que:

$$4 - x^2 = 4(1 - \sin^2(\theta)) = 4 \cos^2(\theta).$$

Portanto:

$$(4 - x^2)^{3/2} = (4 \cos^2(\theta))^{3/2} = 8 \cos^3(\theta).$$

Substituindo na integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(4 - x^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{1}{8 \cos^3(\theta)} \cdot 2 \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos^2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \tan(\theta) + C. \end{aligned}$$

Como $x = 2 \sin(\theta)$, temos:

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

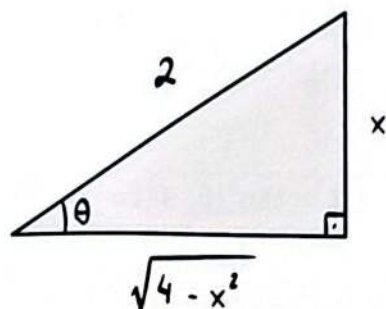


Figura 7.13: Triângulo retângulo baseado em $x = 2 \sin(\theta)$.

A Figura 7.13 auxilia nessa visualização. Portanto, o resultado final é:

$$\int \frac{1}{(4-x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C.$$

Problema 7.11

Como temos $\sqrt{x^2 - 1}$, fazemos a substituição trigonométrica:

$$x = \sec(\theta) \Rightarrow dx = \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta.$$

Restringindo o ângulo θ ao intervalo $0 < \theta < \pi/2 \cup \pi < \theta < 3\pi/2$, temos:

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\sec^2(\theta) - 1} = \tan(\theta).$$

Substituindo na integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx &= \int \frac{1}{\sec(\theta) \cdot \tan(\theta)} \cdot \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta \\ &= \int 1 d\theta \\ &= \theta + C. \end{aligned}$$

Como $x = \sec(\theta)$, temos:

$$\theta = \operatorname{arcsec}(x).$$

Portanto, o resultado final é:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec}(x) + C.$$

Problema 7.12

Essa é uma integral razoavelmente mais difícil de ser executada. Para fazê-la, procederemos da seguinte forma.

Como temos $x^2 + 1$, fazemos a substituição que segue

$$x = \tan(\theta) \Rightarrow dx = \sec^2(\theta) d\theta.$$

Sabemos que:

$$x^2 + 1 = \tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta).$$

Portanto:

$$(x^2 + 1)^{5/2} = (\sec^2(\theta))^{5/2} = \sec^5(\theta).$$

Substituindo na integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{5/2}} dx &= \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec^5(\theta)} d\theta \\ &= \int \cos^3(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Para resolver $\int \cos^3(\theta) d\theta$, usamos a identidade:

$$\cos^3(\theta) = \cos(\theta)(1 - \sin^2(\theta)).$$

Substituindo:

$$\int \cos^3(\theta) d\theta = \int \cos(\theta) d\theta - \int \cos(\theta) \sin^2(\theta) d\theta.$$

Seja $u = \sin(\theta)$, então $du = \cos(\theta) d\theta$. Assim:

$$\int \cos^3(\theta) d\theta = \sin(\theta) - \int u^2 du = \sin(\theta) - \frac{u^3}{3} + C = \sin(\theta) - \frac{\sin^3(\theta)}{3} + C.$$

Como $x = \tan(\theta)$, temos:

$$\sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

A Figura 7.14 facilita a visualização dessa relação.

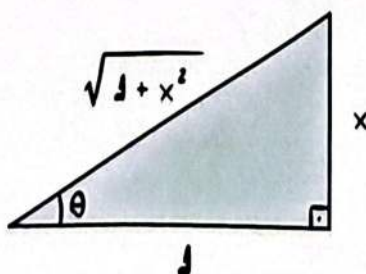


Figura 7.14: Triângulo auxiliar com $x = \tan(\theta)$.

Logo:

$$\sin^3(\theta) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)^3 = \frac{x^3}{(x^2 + 1)^{3/2}}.$$

Portanto, a integral final é:

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^{5/2}} dx = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x^3}{3(x^2 + 1)^{3/2}} + C.$$

Seção 7.5 – Integração por Frações Parciais

Problema 7.13

Fatorando o denominador, temos:

$$x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4).$$

Decompondo em frações parciais, temos:

$$\frac{15x + 20}{(x - 1)(x + 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 4}.$$

Multiplicando ambos os lados por $(x - 1)(x + 4)$, obtemos:

$$15x + 20 = A(x + 4) + B(x - 1).$$

Os coeficientes A e B podem ser determinados substituindo, por exemplo, $x = 1$ e $x = -4$, resultando em $A = 7$ e $B = 8$. Então, as integrais se tornam imediatas, como segue:

$$\int \frac{15x + 20}{(x - 1)(x + 4)} dx = \int \frac{7}{x - 1} dx + \int \frac{8}{x + 4} dx.$$

Essas integrais são imediatas, resultando finalmente em:

$$\int \frac{15x + 20}{x^2 + 3x - 4} dx = 7 \ln |x - 1| + 8 \ln |x + 4| + C.$$

Problema 7.14

O denominador pode ser fatorado como segue:

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2).$$

Efetuada a decomposição em frações parciais, fica:

$$\frac{16x + 40}{x(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2}.$$

Multiplicando ambos os lados por $x(x - 2)(x + 2)$, obtemos:

$$16x + 40 = A(x - 2)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 2).$$

Os coeficientes A , B e C podem ser determinados conforme explicado no Apêndice C, obtendo $A = -10$, $B = 9$ e $C = 1$.

Portanto, podemos reescrever a integral e resolvê-la diretamente como:

$$\begin{aligned}\int \frac{16x + 40}{x(x-2)(x+2)} dx &= \int \left(\frac{-10}{x} + \frac{9}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= -10 \int \frac{1}{x} dx + 9 \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= -10 \ln |x| + 9 \ln |x-2| + \ln |x+2| + C.\end{aligned}$$

Portanto, o resultado final é:

$$\boxed{\int \frac{16x + 40}{x^3 - 4x} dx = -10 \ln |x| + 9 \ln |x-2| + \ln |x+2| + C.}$$

Problema 7.15

Primeiramente, decompondo em frações parciais, temos:

$$\frac{2x^2 - 2x + 4}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3}.$$

Multiplicando ambos os lados por $(x+1)^2(x-3)$, obtemos:

$$2x^2 - 2x + 4 = A(x+1)(x-3) + B(x-3) + C(x+1)^2.$$

Novamente, os coeficientes A , B e C podem ser determinados conforme explicado no Apêndice C, obtendo $A = 1$, $B = -2$ e $C = 1$ e, com isso, podemos reescrever a integral como:

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 4}{(x+1)^2(x-3)} dx = \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{-2}{(x+1)^2} dx + \int \frac{1}{x-3} dx.$$

Essas integrais são imediatas e podem ser resolvidas diretamente:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+1} dx &= \ln |x+1| + C, \\ \int \frac{-2}{(x+1)^2} dx &= \frac{2}{x+1} + C, \\ \int \frac{1}{x-3} dx &= \ln |x-3| + C.\end{aligned}$$

Portanto, o resultado final é:

$$\boxed{\int \frac{2x^2 - 2x + 4}{(x+1)^2(x-3)} dx = \ln |x+1| + \frac{2}{x+1} + \ln |x-3| + C.}$$

Problema 7.16

Primeiro, observe que o grau do numerador é maior que o grau do denominador. Isso indica que precisaremos efetuar a divisão dos polinômios ou, como foi apresentado no Apêndice C, fazer uma manipulação com o intuito de reescrever essa equação. Isso é feito a seguir:

$$\begin{aligned}\frac{x^3 + 4x^2 + 4x - 3}{x^2 + x - 2} &= \frac{x(x^2 + x - 2) + 3x^2 + 6x - 3}{x^2 + x - 2} \\ &= \frac{x(x^2 + x - 2) + 3(x^2 + x - 2) + 3x + 3}{x^2 + x - 2} \\ &= x + 3 + \frac{3x + 3}{x^2 + x - 2}.\end{aligned}$$

A integral pode, então, ser reescrita como:

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x - 3}{x^2 + x - 2} dx = \int x dx + \int 3 dx + \int \frac{3x + 3}{x^2 + x - 2} dx.$$

Os dois primeiros termos são imediatos:

$$\int x dx + \int 3 dx = \frac{x^2}{2} + 3x + C_1.$$

Resta apenas o último termo, no qual será utilizada, de fato, a decomposição em frações parciais. Repare que o denominador pode ser fatorado em:

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2).$$

Assim, procede-se com a seguinte decomposição:

$$\frac{3x + 3}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}.$$

Multiplicando ambos os lados por $(x - 1)(x + 2)$, obtemos:

$$3x + 3 = A(x + 2) + B(x - 1).$$

Assim, efetuando os cálculos de maneira idêntica à que fizemos nos casos anteriores, encontramos $A = 2$ e $B = 1$. Isso nos permite reescrever a fração e, consequentemente, sua integral, que é imediata e dada por:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x + 3}{(x - 1)(x + 2)} dx &= \int \frac{2}{x - 1} dx + \int \frac{1}{x + 2} dx \\ &= 2 \ln |x - 1| + \ln |x + 2| + C_2.\end{aligned}$$

Finalmente, somando às integrais obtidas inicialmente, temos o resultado final, dado por

$$\boxed{\int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x - 3}{x^2 + x - 2} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 2 \ln |x - 1| + \ln |x + 2| + C.}$$

Problema 7.17

Assim como no Problema 7.16, o numerador não tem grau inferior ao do denominador. Então, podemos manipular e reescrever a fração, assim como fizemos no referido problema e, também, no Apêndice C, como se segue:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 4} = 1 + \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 4}.$$

Assim, a integral a ser calculada se torna:

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 4} dx = \int 1 dx + \int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 4} dx.$$

A primeira integral é imediata, no entanto, a segunda não é e tudo indica que devemos decompô-la em frações parciais. De fato, podemos. No entanto, se olharmos com bastante carinho, podemos ver que ela pode ser resolvida com uma substituição simples. Considere a seguinte substituição:

$$u = x^2 - 3x + 4 \Rightarrow du = (2x - 3)dx.$$

Assim, a segunda integral pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 4} dx &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|x^2 - 3x + 4| + C. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado final será:

$$\boxed{\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 4} dx = x + \ln|x^2 - 3x + 4| + C.}$$

Problema 7.18

A fatoração do denominador é imediata: $9x + x^3 = x(9 + x^2)$. Então, a decomposição em frações parciais, conforme os casos detalhados no Apêndice C, é dada por:

$$\frac{18 + 4x + 3x^2}{x(9 + x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{9 + x^2}.$$

O cálculo dos coeficientes fornece: $A = 2$, $B = 1$, $C = 4$. Portanto, a integral pode ser reescrita como:

$$\int \frac{18 + 4x + 3x^2}{x(9 + x^2)} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{x}{9 + x^2} dx + \int \frac{4}{9 + x^2} dx.$$

A primeira integral é imediata:

$$\int \frac{2}{x} dx = 2 \ln|x| + C_1.$$

A segunda, ao aplicar a substituição $u = 9 + x^2 \Rightarrow du = 2x dx$, resulta em:

$$\int \frac{x}{9 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |9 + x^2| + C_2.$$

A última integral, apesar de menos comum, pode ser facilmente resolvida através da substituição simples $x = 3u$, resultando em:

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{9 + x^2} dx &= 4 \int \frac{1}{3^2 + x^2} dx \\ &= 4 \cdot \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{x}{3} \right) + C_3. \end{aligned}$$

Agora, somando todos os termos, temos o resultado final:

$$\boxed{\int \frac{18 + 4x + 3x^2}{9x + x^3} dx = 2 \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |9 + x^2| + \frac{4}{3} \arctan \left(\frac{x}{3} \right) + C.}$$

Problema 7.19

Apesar de parecer um problema ordinário, esse é um problema bastante interessante. Começemos com a seguinte substituição:

$$u = \sqrt{x+9} \Rightarrow u^2 = x+9 \Rightarrow x = u^2 - 9.$$

Derivando x com relação a u , fornece:

$$x = u^2 - 9 \Rightarrow dx = 2u du.$$

Escrevendo a integral em função de u , temos:

$$\int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx = \int \frac{u}{u^2 - 9} \cdot 2u du = 2 \int \frac{u^2}{u^2 - 9} du.$$

O numerador do integrando possui mesmo grau que o denominador, então, podemos manipular essa expressão, escrevendo:

$$\frac{u^2}{u^2 - 9} = \frac{u^2 - 9 + 9}{u^2 - 9} = \frac{u^2 - 9}{u^2 - 9} + \frac{9}{u^2 - 9} = 1 + \frac{9}{u^2 - 9}.$$

O último termo dessa expressão pode ser decomposto por frações parciais como segue:

$$\frac{9}{u^2 - 9} = \frac{9}{(u+3)(u-3)} = \frac{A}{u-3} + \frac{B}{u+3}.$$

O cálculo dos coeficientes fornece que $A = \frac{3}{2}$ e $B = -\frac{3}{2}$.

Portanto, a integral se torna:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx &= 2 \int \frac{u^2}{u^2-9} du \\
 &= 2 \int \left(1 + \frac{9}{u^2-9} \right) du \\
 &= 2 \int \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{u-3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{u+3} \right) du \\
 &= 2 \int 1 du + 3 \int \frac{1}{u-3} du - 3 \int \frac{1}{u+3} du \\
 &= 2u + 3 \ln |u-3| - 3 \ln |u+3| + C \\
 &= 2u + 3 \ln \left| \frac{u-3}{u+3} \right| + C.
 \end{aligned}$$

Finalmente, voltando à variável original x , temos que a integral procurada é:

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx = 2\sqrt{x+9} + 3 \ln \left| \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3} \right| + C.}$$

Seção 7.6 - Integrais Impróprias

Problema 7.20

A integral é imprópria devido ao limite superior infinito. Reescrevemos como limite:

$$\int_1^{\infty} x e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x e^{-x} dx.$$

Usaremos integração por partes. Seja:

$$\begin{aligned}
 u = x &\Rightarrow du = dx, \\
 dv = e^{-x} dx &\Rightarrow v = -e^{-x}.
 \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula:

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C.$$

Aplicando os limites de 1 a b :

$$\begin{aligned}
 \int_1^b x e^{-x} dx &= [-x e^{-x} - e^{-x}]_1^b \\
 &= (-b e^{-b} - e^{-b}) - (-1 \cdot e^{-1} - e^{-1}) \\
 &= -b e^{-b} - e^{-b} + \frac{2}{e}.
 \end{aligned}$$

Agora, tomamos o limite dos termos que envolvem b :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (-be^{-b} - e^{-b}) = 0.$$

Pois $be^{-b} \rightarrow 0$ e $e^{-b} \rightarrow 0$ quando $b \rightarrow \infty$.

Portanto, o valor da integral é:

$$\boxed{\int_1^{\infty} xe^{-x} dx = \frac{2}{e}.$$

Problema 7.21

Como temos limite no infinito, podemos executar a seguinte integral imprópria:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

A primitiva de $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ é:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$$

Aplicando os limites:

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^b = \ln(b + \sqrt{b^2 + 1}) - \ln(0 + \sqrt{0^2 + 1}). \\ &= \ln(b + \sqrt{b^2 + 1}) - \ln(1) = \ln(b + \sqrt{b^2 + 1}). \end{aligned}$$

Agora tomamos o limite quando $b \rightarrow \infty$:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b + \sqrt{b^2 + 1}) \sim \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(2b) = \infty.$$

Portanto, a integral diverge:

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \text{ diverge.}}$$

Problema 7.22

A integral é imprópria devido ao limite superior infinito. Escrevemos:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx.$$

À primeira vista, pode ser tentador começar a resolver por frações parciais e, de fato funciona, mas podemos, ao invés de fazer isso, fatorar o denominador como se segue:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

Assim, temos:

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} + C.$$

Aplicando os limites:

$$\int_1^b \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x+1} \right]_1^b = -\frac{1}{b+1} + \frac{1}{2}.$$

Agora tomamos o limite:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b+1} + \frac{1}{2} \right) = 0 + \frac{1}{2}.$$

Portanto:

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx = \frac{1}{2}.$$

Problema 7.23

A integral é imprópria, porque $\ln(x)$ tende a $-\infty$ quando $x \rightarrow 0^+$. Escrevemos:

$$\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \ln(x) dx.$$

Usaremos integração por partes:

$$\begin{array}{lll} u = \ln x & \Rightarrow & du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x. \end{array}$$

Aplicando a fórmula:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C.$$

Aplicamos os limites:

$$\int_a^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_a^1 = (1 \cdot \ln 1 - 1) - (a \ln a - a) = -1 - (a \ln a - a).$$

Agora tomamos o limite:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} (-1 - a \ln a + a) = -1 + 0 = -1.$$

Portanto:

$$\boxed{\int_0^1 \ln(x) dx = -1.}$$

Problema 7.24

Reconhecemos que a função $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ é a derivada da função $\arcsin(x)$. Assim:

$$\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \arcsin(x) + C.$$

Aplicando os limites:

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = [2 \arcsin(x)]_0^1 = 2 \arcsin(1) - 2 \arcsin(0) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

Portanto:

$$\boxed{\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi.}$$

Problema 7.25

A função apresenta descontinuidade infinita em $x = 0$. Escrevemos:

$$\int_0^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx.$$

Fazemos a substituição:

$$u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} dx \Rightarrow \frac{1}{x^2} dx = -du.$$

Quando $x = a$, então, $u = \frac{1}{a}$; quando $x = 2$, então, $u = \frac{1}{2}$. Assim:

$$\begin{aligned} \int_a^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx &= \int_{1/a}^{1/2} e^u (-du) = \int_{1/2}^{1/a} e^u du \\ &= [e^u]_{1/2}^{1/a} = e^{1/a} - e^{1/2}. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $a \rightarrow 0^+$, temos que $\frac{1}{a} \rightarrow \infty$:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} (e^{1/a} - e^{1/2}) = \infty - e^{1/2} = \infty.$$

Portanto, a integral diverge:

$$\boxed{\int_0^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx \text{ diverge.}}$$

Capítulo 8

Integrais: Aplicações

A essa altura, não existe, sob o sol, integral que o leitor já não tenha feito ou que, no mínimo, disponha de ferramentas suficientes para transformá-la em uma factível. Assim, cabe a nós, agora, a melhor parte de todas: utilizá-las.

Passamos o Capítulo 7 estudando métodos para integrar os mais variados tipos de funções. No entanto, como lhe foi adiantado no Capítulo 6, resolver uma integral é apenas uma das partes do processo, parte essa que você já notou ser, muitas vezes, bem mais ferramental do que criativa. Dito isso, dedicamos o presente capítulo a ver, na prática, a utilidade das integrais. Resolvê-las, naturalmente, fará parte do processo, mas construir as integrais e conhecer os diversos problemas que elas são capazes de resolver será nosso foco a partir de agora.

8.1 Área entre Curvas

No Capítulo 6, o leitor foi apresentado à ideia de integral e viu que efetuar a integral de uma função $f(x)$ entre dois valores de x , a saber, a e b , significa calcular a área entre essa curva e o eixo x no intervalo $[a, b]$. A Figura 8.1(a) ilustra essa situação. Denotemos essa área por A_f , de maneira que

$$A_f = \int_a^b f(x) dx.$$

O objetivo dessa seção é extrapolar essa ideia à situação na qual desejamos calcular a área entre as curvas de duas funções quaisquer, a dizer, $f(x)$ e $g(x)$. Então, para construir essa simples ideia, podemos ver na Figura 8.1(b) a área A_g abaixo da função $g(x)$, que, de maneira análoga à A_f , será dada por:

$$A_g = \int_a^b g(x) dx.$$

De maneira bastante clara, a área A entre essas curvas, que está representada na Figura 8.1(c), pode ser calculada subtraindo as áreas obtidas em cada situação, ou

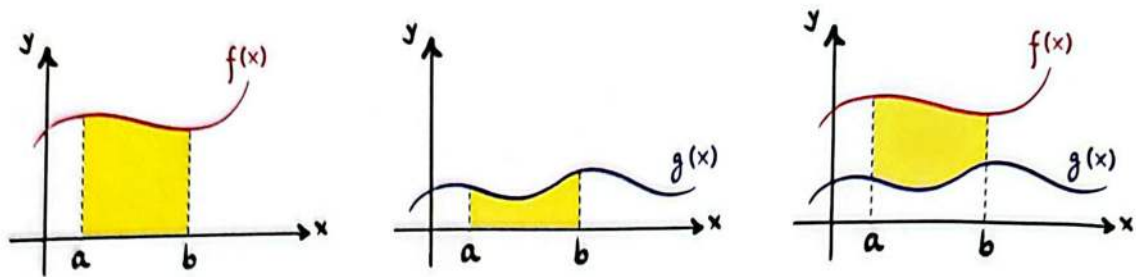


Figura 8.1: Áreas abaixo e entre as curvas das funções $f(x)$ e $g(x)$.

seja,

$$A = A_f - A_g.$$

Dessa maneira, pela linearidade das integrais, podemos escrever:

$$A = A_f - A_g = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Esse é um resultado bastante intuitivo que mostra que, para calcular a área entre duas curvas $f(x)$ e $g(x)$ em um intervalo $[a, b]$, basta efetuar a integral da diferença dessas funções. No entanto, apesar de bastante simples, esse resultado tem implicações importantes que serão utilizadas nas seções subsequentes.

Exemplo 8.1

Calcule a área da região limitada entre as curvas $f(x) = x + 9$ e $g(x) = -x + 6$, no intervalo $[2, 5]$.

A situação está ilustrada na Figura 8.2(a).

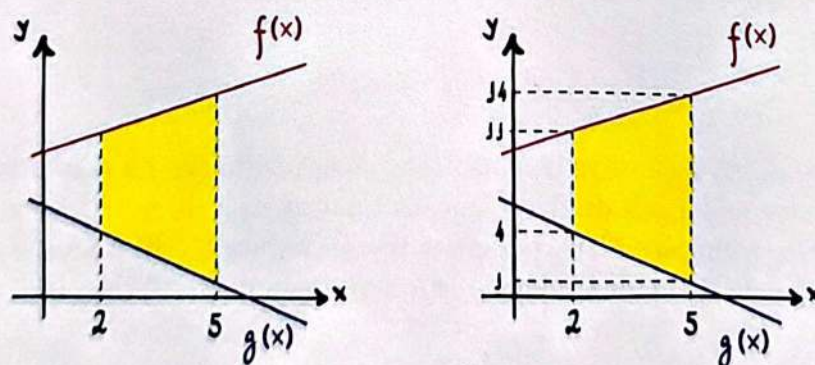


Figura 8.2: Área entre as funções $f(x) = x + 9$ e $g(x) = -x + 6$.

Essa área, então, será dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_2^5 [f(x) - g(x)] dx = \int_2^5 [(x+9) - (-x+6)] dx = \int_2^5 (2x+3) dx \\ &= [x^2 + 3x]_2^5 = (25 + 15) - (4 + 6) = 40 - 10 = 30 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 30.}$$

Esse valor pode ser facilmente confirmado calculando essa área por Geometria Plana, em que a área do trapézio de bases 13 e 7 e altura 3, conforme a Figura 8.2(b), é de fato igual a 30.

Exemplo 8.2

Calcule a área da região limitada entre as curvas $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(x) = x - 1$.

Os pontos de interseção são obtidos igualando as funções:

$$x^2 - 4x + 3 = x - 1 \implies x = 1 \text{ e } x = 4.$$

Apesar de ser possível resolver o problema sem o rascunho, é importante fazer o esboço da situação, especialmente para entendermos melhor o comportamento de cada função e as posições relativas entre as curvas. A Figura 8.3 mostra as duas curvas e a região cuja área A desejamos calcular.

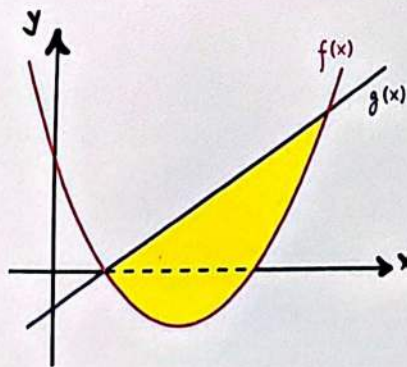


Figura 8.3: Área da região entre a reta e a parábola.

É possível ver que, ao longo de toda essa região, a reta $g(x)$ fica acima da parábola $f(x)$. Assim, a área dessa região será dada por:

$$A = \int_1^4 [g(x) - f(x)] dx = \int_1^4 [(x-1) - (x^2 - 4x + 3)] dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_1^4 \\
 &= \left(-\frac{64}{3} + 40 - 16 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4 \right) = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

$$A = \frac{9}{2}.$$

8.2 Comprimento de Curvas

Outra aplicação muito interessante das integrais é no cálculo do comprimento de curvas. Para ver como isso é possível, considere a situação ilustrada na Figura 8.4. O objetivo é calcular o comprimento L da curva da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Para isso, consideremos o diferencial dL do arco. Assim, pode-se calcular o comprimento L “somando” todos os elementos infinitesimais, ou seja,

$$L = \int dL.$$

É importante lembrar que a variável independente x é quem definirá o intervalo no qual queremos calcular o comprimento da curva. Assim, a primeira parte da nossa missão é relacionar os infinitesimais ou, como a essa altura já estamos aptos a falar, os diferenciais, dL e dx . Por se tratar de dimensões muito pequenas, podemos aproximar o diferencial dL por um segmento de reta e relacioná-lo aos diferenciais dx e dy pelo Teorema de Pitágoras, como mostra a Figura 8.4, sendo tal relação dada por:

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Antes de manipular essa expressão, lembre-se que y é uma função de x . Logo, pela Regra da Cadeia, $dy = y' dx$. Assim, procedendo com a manipulação, podemos

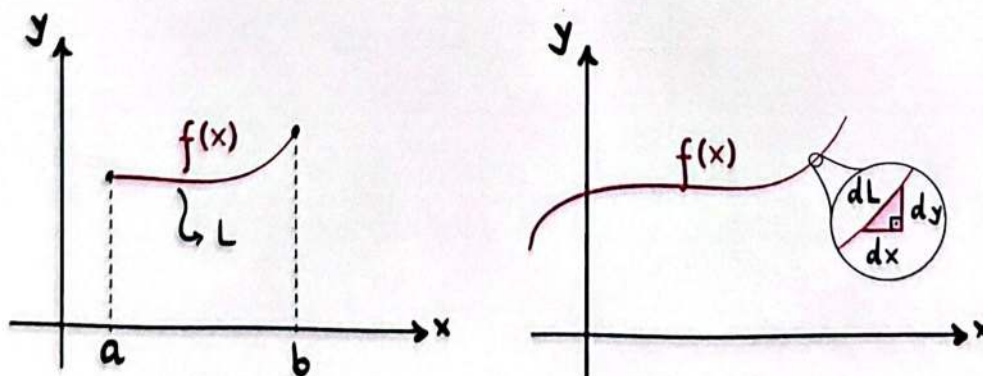


Figura 8.4: Comprimento de curva.

escrever:

$$\begin{aligned}
 dL &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\
 &= \sqrt{dx^2 + (y' dx)^2} \\
 &= \sqrt{dx^2(1 + (y')^2)} \\
 &= dx \sqrt{1 + (y')^2}.
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Talvez o leitor já esteja estranhando o tempo ao qual não é submetido a um questionamento. Então, fazê-lo-ei, neste momento:

Por que foi feita essa manipulação para reescrever o diferencial dL dessa maneira?

A resposta é baseada em duas razões:

1. O único diferencial que aparece agora no lado direito é o dx ;
2. Assume-se que a função $y = f(x)$ é conhecida. Assim, o termo y' é simplesmente a derivada dessa função.

Podemos resumir o cálculo do comprimento L de uma curva por:

Cálculo do Comprimento L de uma curva.

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e $y' = f'(x)$ sua derivada. Assim, o comprimento L da curva descrita por $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ é dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Exemplo 8.3

Calcule o comprimento da curva $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ no intervalo $[0, 3]$.

Derivando a função $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = x^{1/2}.$$

Então, aplicando o resultado na fórmula do comprimento L da curva, fica:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + x} dx.$$

Fazendo a substituição $u = 1 + x$, $du = dx$, com limites $u(0) = 1$ e $u(3) = 4$:

$$L = \int_1^4 u^{1/2} du = \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^4 = \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{14}{3}.$$

Portanto, o comprimento da curva é:

$$L = \frac{14}{3}.$$

A Figura 8.5 ilustra essa situação.

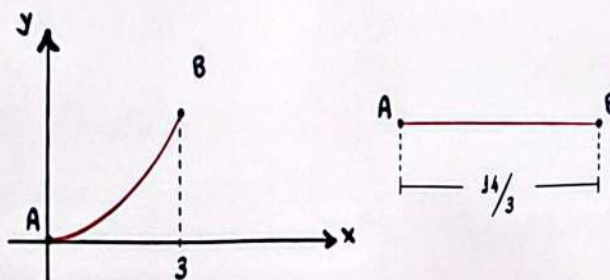


Figura 8.5: Comprimento da curva.

8.3 Volume

Dentre todas as aplicações da integração, chegamos agora a uma das mais fascinantes delas. É verdadeiramente fantástico saber que somos capazes de calcular o volume de qualquer sólido usando integrais, como o leitor há de descobrir nesta seção. Para tal, serão apresentadas duas maneiras de fazê-lo, cada qual com suas particularidades. Em breve, o leitor entenderá as suas nuances e em quais ocasiões é melhor um método em relação ao outro.

8.3.1 Área de seção transversal $A(x)$ conhecida

Esse método é utilizado para calcular o volume de um sólido cuja função, que descreve sua área de seção transversal $A(x)$, é conhecida. Porém, antes de apresentar o método propriamente dito, lembremo-nos de alguns conhecimentos da Geometria Espacial. Dois dos sólidos estudados mais simples são o **Cilindro** e o **Prisma**, representados na Figura 8.6. Como já é sabido, o volume V de sólidos com seção de área A constante ao longo da altura é dado por:

$$V = A \cdot h.$$

Em particular, o volume V_c de um cilindro com altura h e raio da base R é dado por:

$$V_c = \pi R^2 h.$$

No entanto, apesar de úteis e bastante importantes, esses sólidos são muito limitados, pois ficamos presos à necessidade de que a área da seção transversal seja

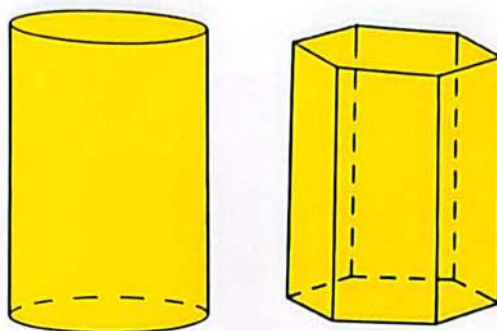


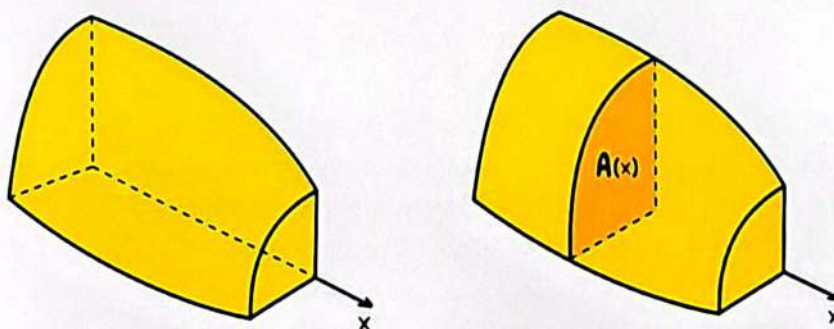
Figura 8.6: Prisma e Cilindro.

constante. O leitor pode argumentar que, também, sabe calcular a área de pirâmides e cones, sólidos nos quais a área não é constante ao longo de suas alturas e isso é realmente verdade. Entretanto, ainda assim, continuamos limitados, uma vez que nesses sólidos a área da seção transversal varia *linearmente* com a altura, o que ainda nos confere uma limitação significativa. Então, a pergunta que deve surgir imediatamente é:

Como calcular o volume de sólidos cuja área da seção transversal seja descrita por uma função $A(x)$ qualquer?

Pois bem, é exatamente esse o problema que será tratado nesta seção e, ao final dela, estaremos aptos a calcular o volume de qualquer um desses sólidos.

Considere, então, o sólido genérico representado na Figura 8.7(a), cuja área $A(x)$ da seção transversal na direção x seja conhecida no intervalo $[a, b]$, conforme a Figura 8.7(b).

Figura 8.7: Sólido com área $A(x)$ da seção transversal conhecida.

Nesse momento, levanto o seguinte questionamento:

Como poderíamos invocar a ideia principal do Cálculo Integral para calcular o volume desse sólido?

A resposta para essa pergunta é bastante simples: vamos dividir esse problema em probleminhas menores, cuja solução nós conhecemos. Isso pode ser feito subdividindo o sólido em sólidos menores de seções constantes, ou seja, em pequenos “prismas”, conforme representado na Figura 8.8.

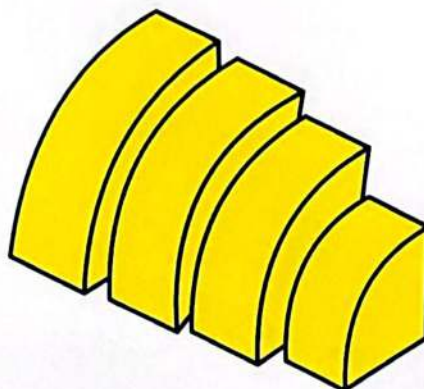


Figura 8.8: Sólido subdividido em sólidos de seção constante.

Dessa maneira, o volume V desse sólido poderia ser aproximado, subdividindo-o em três partes de mesmo comprimento Δx , por:

$$V \approx V_3 = A(x_1) \cdot \Delta x + A(x_2) \cdot \Delta x + A(x_3) \cdot \Delta x.$$

De forma análoga, ao subdividir esse sólido em cinco partes, o volume seria aproximado por:

$$V \approx V_5 = A(x_1) \cdot \Delta x + A(x_2) \cdot \Delta x + A(x_3) \cdot \Delta x + A(x_4) \cdot \Delta x + A(x_5) \cdot \Delta x.$$

De forma geral, ao subdividir o sólido em n partes, seu volume V seria aproximado por:

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(x_i) \cdot \Delta x \quad ; \quad \text{onde} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Naturalmente, quanto maior o número n de subdivisões, melhor a aproximação e, a essa altura, o leitor não só já foi apresentado à ideia de limite, como também já possui domínio do conceito de integral. Assim, pensando em elementos infinitesimais, onde $n \rightarrow \infty$, temos $\Delta x \rightarrow 0$, e o volume V será dado por:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i) \cdot \Delta x. \quad (8.2)$$

Conforme também já é de conhecimento do leitor, a Equação (8.2) trata-se, literalmente, de uma integral, ou seja,

$$V = \int_a^b A(x) dx. \quad (8.3)$$

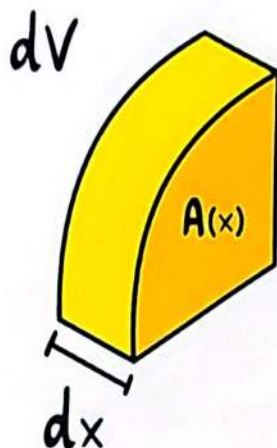


Figura 8.9: Relação entre os elementos infinitesimais dV e dx .

Por outro lado, pensando de uma maneira puramente geométrica, podemos modelar esse problema como segue. O volume V do sólido é a soma dos volumes infinitesimais dV , ou seja,

$$V = \int dV. \quad (8.4)$$

Cada elemento infinitesimal de volume dV é representado na Figura 8.9. Conhecida a área $A(x)$ de sua base e, tendo dimensões significativamente pequenas de modo a podermos aproximá-lo por um prisma, este se relaciona com o infinitesimal de comprimento dx por:

$$dV = A(x) \cdot dx. \quad (8.5)$$

Assim, substituindo esse resultado da Equação (8.5) na Equação (8.4), temos:

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Repare que, evidentemente, o resultado encontrado é idêntico ao da Equação (8.3).

Conforme mencionado, essa formulação é válida para qualquer sólido cuja área $A(x)$ da seção transversal seja conhecida, mas será especialmente útil quando se tratar de sólidos de revolução, como veremos na subseção a seguir.

Sólidos de Revolução

O caso mais interessante e que na prática nos será mais útil é quando desejamos calcular o volume do sólido gerado pela rotação da região em torno de um eixo. Para tal, considere a situação na qual deseja-se calcular o volume do sólido gerado pela rotação da região abaixo da curva da função $f(x)$ em torno do eixo x no intervalo $[a, b]$, conforme a Figura 8.10. A área $A(x)$ da seção transversal em um ponto x

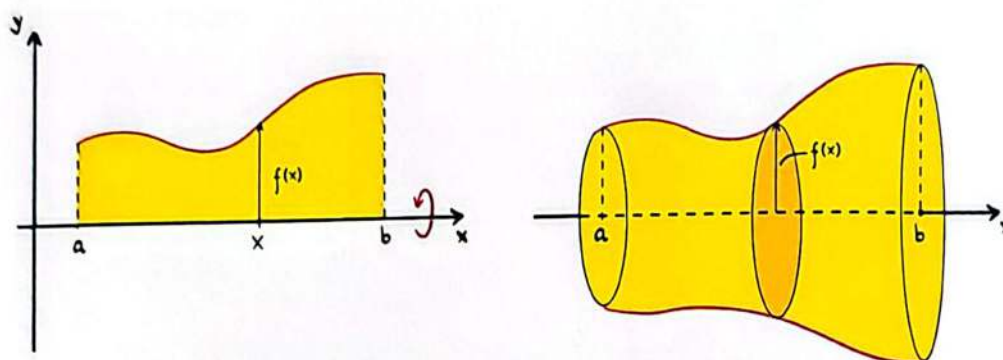


Figura 8.10: Volume de Sólido de Revolução.

qualquer é a área de um círculo de raio $f(x)$, ou seja,

$$A(x) = \pi [f(x)]^2.$$

Assim, aplicando esse resultado na Equação (8.3), temos que o volume do sólido será:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (8.6)$$

Devido à importância dessa ideia, damos a ela o merecido destaque:

Sólido gerado pela rotação de uma curva em torno do eixo x

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$. O volume V do sólido de revolução gerado pela rotação da região abaixo dessa curva em torno do eixo x no intervalo $[a, b]$ é dado por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Dois casos particularmente interessantes são abordados nos Problemas 8.9 e 8.10, nos quais são demonstradas as fórmulas do volume da esfera e do cone.

Exemplo 8.4

Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x da região limitada pela curva $y = x^2$ no intervalo $[0, 1]$.

A Figura 8.11 ilustra essa situação.

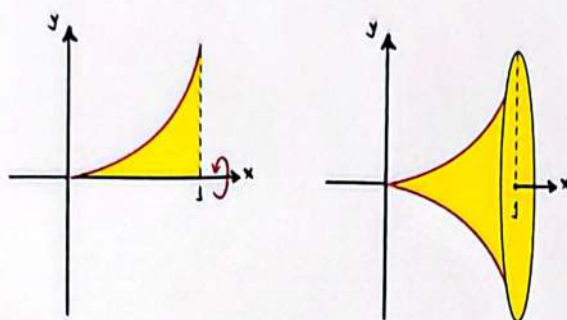


Figura 8.11: Sólido de revolução da curva $y = x^2$ em torno do eixo x .

O volume de um sólido gerado por rotação em torno do eixo x é dado por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Substituindo $f(x) = x^2$, temos:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - 0 \right) = \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

Portanto, o volume do sólido é:

$$\boxed{V = \frac{\pi}{5}.$$

Exemplo 8.5

Considere a mesma curva do Exemplo 8.4, ou seja, $y = x^2$.

Calcule o volume do sólido gerado pela rotação dessa curva em torno do eixo y , entre $y = 0$ e $y = 1$.

A Figura 8.12 ilustra essa situação. Para a rotação em torno do eixo y , precisamos adaptar a formulação desenvolvida. Para isso, reescrevemos a função em termos de y , ou seja,

$$y = f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = g(y) = \sqrt{y}.$$

Assim, adaptando a formulação, o volume pode ser escrito como:

$$V = \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy.$$

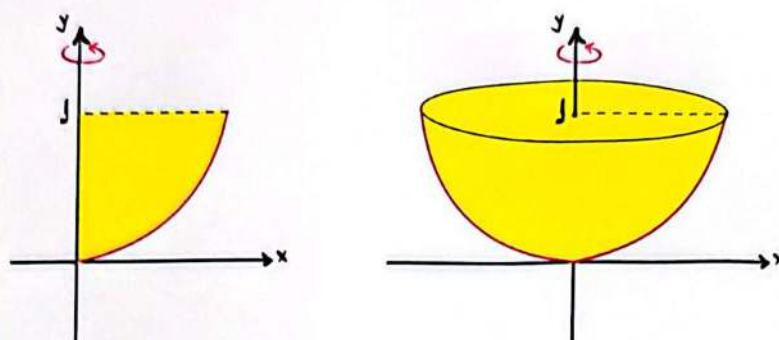


Figura 8.12: Sólido de revolução da curva $y = x^2$ em torno do eixo y .

Substituindo a função, temos:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^1 y dy \\ &= \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, o volume do sólido é:

$$V = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo 8.6

Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x da região limitada entre as curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

A Figura 8.13 ilustra essa situação.

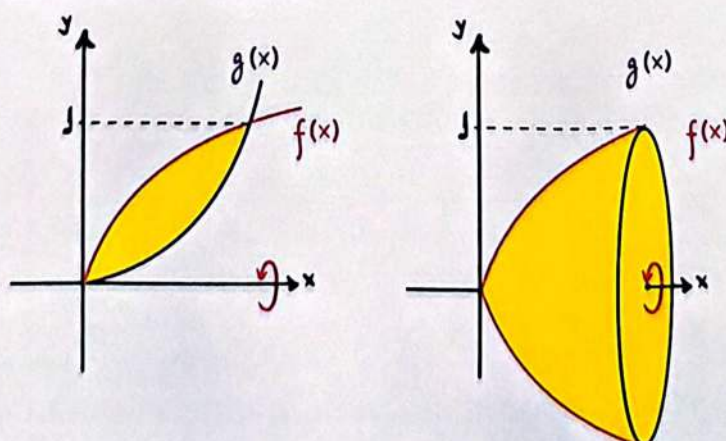


Figura 8.13: Rotação da região entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$ em torno do eixo x .

Esse problema pode ser resolvido pensando de duas maneiras que, ao fim, serão equivalentes:

- Calcular os volumes dos sólidos gerados pelas rotações de cada curva individualmente e subtraí-los.
- Formular um elemento infinitesimal de volume dV da região desejada.

Utilizaremos a segunda opção, uma vez que ela nos trará uma visualização que ainda não fizemos uso. Assim, de acordo com a Figura 8.14, repare que o elemento infinitesimal de volume dV é, na realidade, um sólido cuja base é uma coroa circular, cujos raios externo R e interno r e altura h medem, respectivamente:

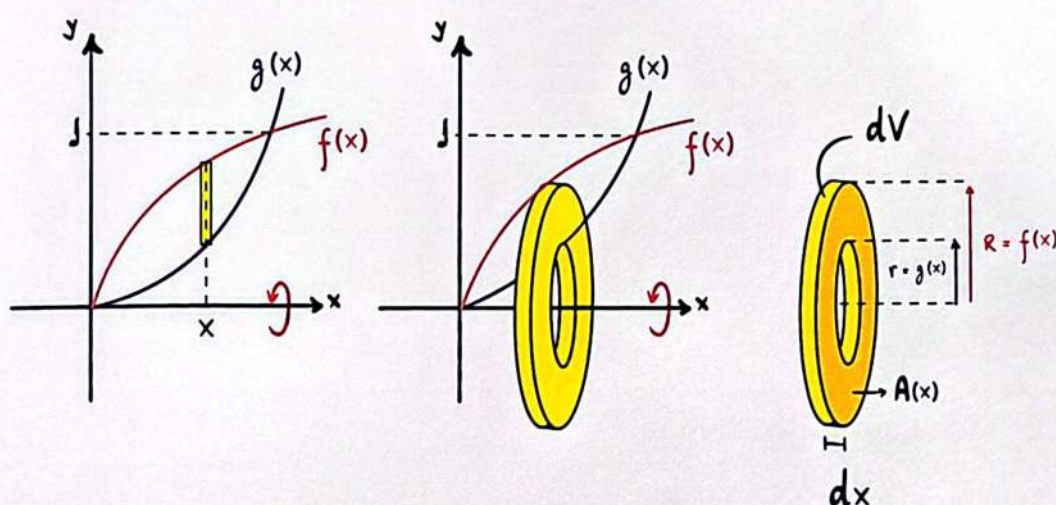


Figura 8.14: Elemento infinitesimal de volume dV entre duas curvas.

$$R = f(x) \quad \text{e} \quad r = g(x) \quad \text{e} \quad h = dx.$$

Assim, área $A(x)$ dessa coroa será:

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi R^2 - \pi r^2 \\ &= \pi [(f(x))^2 - (g(x))^2], \end{aligned}$$

e, para calcular o volume, basta substituirmos essa função na integral da Equação (8.3), ou seja:

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx.$$

Nesse ponto, cabem duas observações:

Observação 01: A formulação feita até o momento é genérica e, portanto, vale para a rotação da região entre quaisquer curvas de funções $f(x)$ e $g(x)$.

Observação 02: É extremamente comum que estudantes façam $A(x) = [f(x) - g(x)]^2$ ao invés de $A(x) = (f(x))^2 - (g(x))^2$. No entanto, isso é um erro grosseiro, uma vez que não estamos calculando a distância vertical entre as duas funções e, sim, a área da coroa circular.

Aplicando essa ideia ao problema em questão, temos $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$. Determinando os pontos de interseção, temos:

$$x^2 = \sqrt{x} \implies x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Assim, o volume V será dado por:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 ((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2) dx \\ &= \pi \int_0^1 (x - x^4) dx \\ &= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$

8.3.2 Cascas Cilíndricas

A seção anterior foi dedicada a ensinar ao leitor como calcular o volume de um sólido cuja área da seção transversal $A(x)$ é conhecida ao longo de todo o seu comprimento. Conforme visto, essa é uma ferramenta fantástica que permite calcular o volume de uma quantidade imensa de sólidos. No entanto, há situações em que esse método não funcionará muito bem, seja porque não será possível definir a função da área $A(x)$ da seção transversal, seja pelo simples fato de que será demasiadamente trabalhoso fazê-lo. Assim, torna-se conveniente o desenvolvimento de outro método que facilite esses cálculos: o **Método das Cascas Cilíndricas**.

Para visualizar as limitações do método anterior, consideremos dois problemas. O primeiro deles é:

Problema 01 - Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x , da região delimitada pela função $y = \sin x$ e o eixo x , entre $x = 0$ e $x = \pi$.

Isso é exatamente o que foi pedido no Exercício 8.37 e essa situação está ilustrada na Figura 8.15. Observe que, ao longo do comprimento do sólido, a seção transversal é circular com raio $r = \sin(x)$ e, portanto, área $A(x) = \pi r^2 = \pi \sin^2(x)$. Esse é o ponto principal: a função área $A(x)$ do elemento infinitesimal é imediata. Assim, o

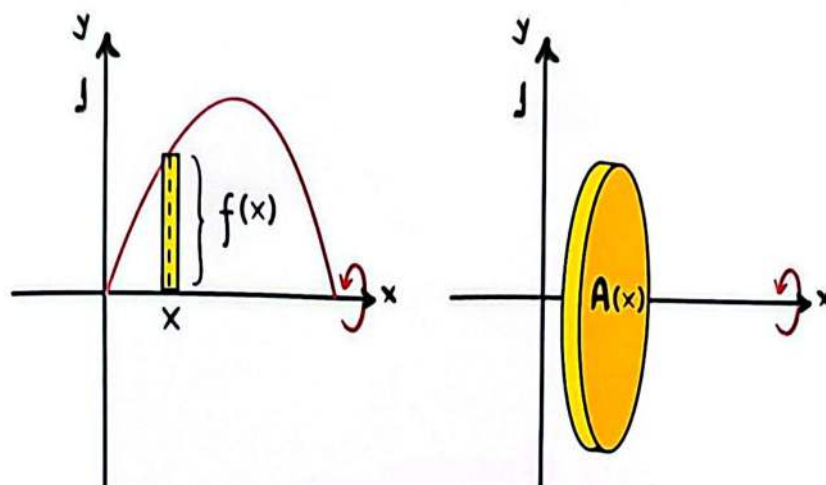


Figura 8.15: Rotação da função $y = \sin(x)$ em torno dos eixos x .

volume poderia ser facilmente calculado resolvendo a integral:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Portanto, nenhum problema até agora. Sigamos, então, para o problema seguinte:

Problema 02 - Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região delimitada pela função $y = \sin(x)$ e o eixo x , entre $x = 0$ e $x = \pi$.

A única mudança em relação ao problema anterior foi o eixo em torno do qual estamos fazendo a rotação. Apesar de parecer uma mudança pouco significativa, isso muda drasticamente o grau de dificuldade do problema. Repare agora no que acontece quando a rotação dessa mesma região é feita em torno do eixo y . Essa situação está ilustrada na Figura 8.16. Você consegue perceber as complexidades em que incorreríamos ao aplicarmos o mesmo método?

Para rotacionar em torno do eixo y , o primeiro passo é escrever a função em termos de y . Você pode argumentar que isso é simples, afinal, teríamos:

$$y = \sin(x) \implies x = \arcsin(y).$$

Contudo, enfrentaremos dois problemas. O primeiro deles é que a função $\arcsin(x)$, por definição, tem imagem no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, enquanto nosso intervalo é de $[0, \pi]$. No entanto, esse está longe de ser o maior dos problemas. Peço encarecidamente que pare por um instante e tente definir a função $A(y)$, ou seja, a área do elemento infinitesimal a uma altura y , que está ilustrado na Figura 8.16. A dificuldade a ser encarada aqui pode passar despercebida caso não receba a devida atenção.

Sim, a área a ser calculada seria a de uma região com formato de coroa circular. Então, o leitor deve estar pensando: "Ora, mas eu sei calcular a área de uma coroa

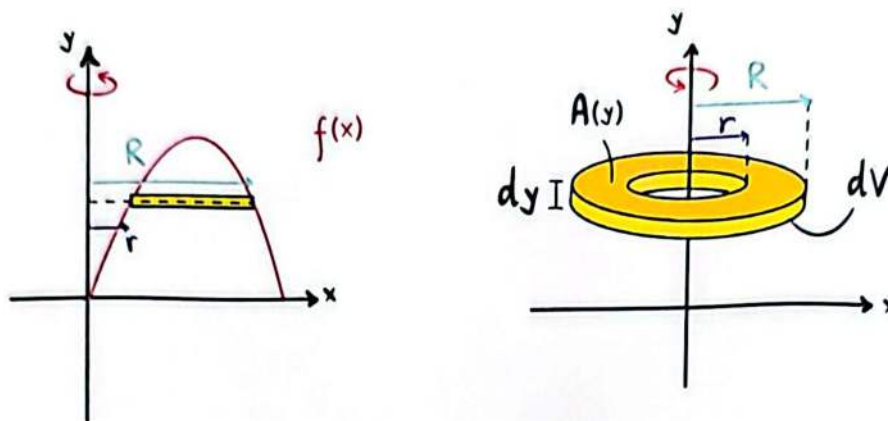


Figura 8.16: Rotação da função $y = \sin(x)$ em torno dos eixos y .

circular. Então o problema está resolvido!”. Pois é... mas não. Encerrando o mistério, o grande problema é o seguinte:

Os raios R e r , ou seja, os raios que determinam a coroa circular estão sobre a mesma função.

No Exemplo 8.6, quando resolvemos um problema cujo elemento infinitesimal era uma coroa circular, cada um dos raios R e r era determinado por uma função diferente: $R = f(x)$ e $r = g(x)$. No entanto, nessa situação, como faríamos? As extremidades dos raios estão sobre a mesma função. Nesse caso, teríamos que separar a função em dois trechos, conforme representado na Figura 8.17, de modo que com a função interna $f(y)$ possamos calcular o raio interno r e com a outra função externa $g(y)$ possamos calcular o raio externo R . Acredito não ser necessário continuar argumentando sobre o quanto isso será trabalhoso.

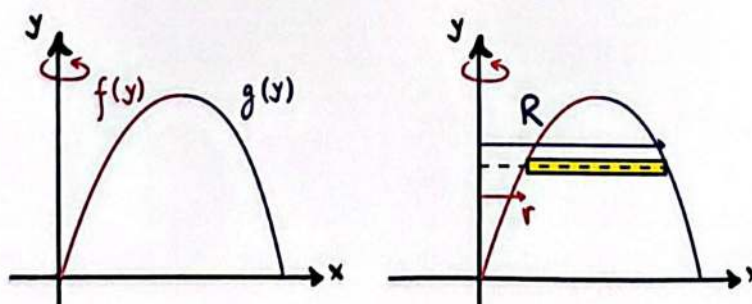


Figura 8.17: Separação da função $y = \sin(x)$.

Contudo, não só digo para ficar à vontade e resolver esse problema dessa maneira, como também recomendo que o faça. Do ponto de vista didático, é ótimo, pois você entenderá a fundo e sentirá na pele as dificuldades que explicitarei.

Portanto, assumindo que o leitor esteja convencido da dificuldade que emana dessa situação, venho lhe trazer uma solução alternativa para a resolução desse tipo

de problema: a *Integração por Cascas Cilíndricas*.

O primeiro passo é definir o que é uma casca cilíndrica, que, a propósito, é bastante intuitivo. Esse sólido está ilustrado na Figura 8.18: trata-se do sólido remanescente ao retirar um cilindro de raio r de um cilindro maior de raio R , formando, literalmente, uma casca cilíndrica.



Figura 8.18: Casca cilíndrica.

Repare que a área da base desse sólido seria dada por $A = \pi(R^2 - r^2)$ e, portanto, seu volume V será:

$$V = Ah \implies \boxed{V = \pi(R^2 - r^2)h.}$$

Pensando agora no problema genérico de rotacionar a região abaixo da função $y = f(x)$ em torno do eixo y entre $x = a$ e $x = b$, observe que podemos construir esse sólido a partir da união de cascas cilíndricas. A Figura 8.19 ilustra essa construção. Naturalmente, como já é de praxe, quanto mais finas as cascas cilíndricas, melhor a aproximação. Portanto, no limite em que essas cascas forem tão finas quanto possamos ter, teremos o volume exato do sólido.

O elemento infinitesimal de área dA é a área da base da casca cilíndrica. Esse problema já foi resolvido no fim do Capítulo 6, mas podemos reformulá-lo rapidamente como segue: posicionando a origem do eixo x no centro da base da casca e admitindo

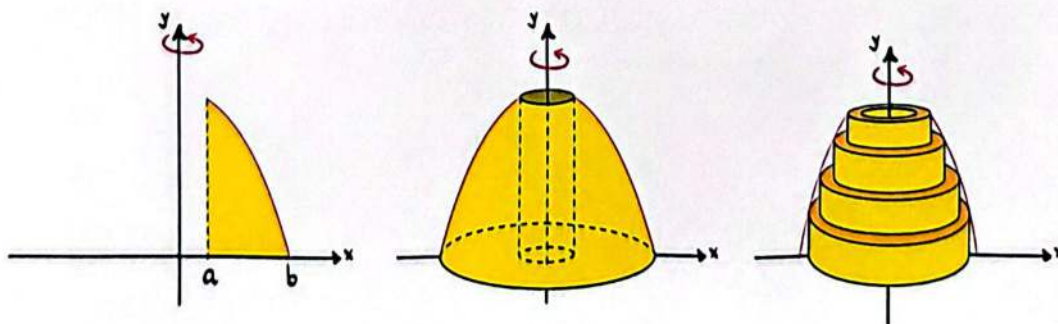


Figura 8.19: Sólido aproximado por cascas cilíndricas.

sua espessura infinitesimal dx , esse elemento dA será dado por:

$$\begin{aligned} dA &= \pi[(x + dx)^2 - x^2] \\ &= \pi[x^2 + 2x dx + dx^2 - x^2] \\ &\approx 2\pi x dx. \end{aligned}$$

Repare que o termo de segunda ordem dx^2 foi desprezado, posto que ele é desprezível quando comparado a dx , no limite infinitesimal. Agora, o volume dessa casca cilíndrica, que representa o elemento infinitesimal de volume dV , pode ser calculado de maneira simples, observando que sua altura é dada pela função $f(x)$, ou seja:

$$\begin{aligned} dV &= dA \cdot h \\ &= 2\pi x dx \cdot f(x) \\ &= 2\pi \cdot x f(x) dx. \end{aligned}$$

Finalmente, o volume V desse sólido pode ser calculado integrando esses elementos infinitesimais dV ao longo da região considerada, de modo que podemos escrever:

$$V = \int dV$$

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

(8.7)

Generalizações não costumam ser muito produtivas, pois muitas vezes engessam o raciocínio do estudante e impedem que ele adapte a metodologia às diferentes situações. No entanto, acredito que vale ressaltar que esse método é especialmente útil quando a equação da curva é dada em função de x , ou seja, temos $y = f(x)$, e a rotação é feita em torno do eixo y . Contudo, assim como fizemos no método anterior, mostraremos que este, também, é passível de ser adaptado a diferentes situações.

Exemplo 8.7

Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada pela curva $y = \sin(x)$, no intervalo $[0, \pi]$.

Utilizando o método das cascas cilíndricas, ou seja, aplicando a Equação (8.7), temos que o volume será dado por:

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \cdot \sin(x) dx.$$

Aplicamos integração por partes:

$$u = x \Rightarrow du = dx, \quad dv = \sin(x) dx \Rightarrow v = -\cos(x).$$

$$\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + C.$$

Avaliando nos limites:

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi [-x \cos(x) + \sin(x)] \Big|_0^\pi \\
 &= 2\pi [-\pi \cos(\pi) + \sin(\pi) - (0 + \sin(0))] \\
 &= 2\pi [-\pi(-1) + 0] \\
 &= 2\pi^2.
 \end{aligned}$$

Portanto, o volume do sólido é:

$$V = 2\pi^2.$$

Exemplo 8.8

Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada entre as curvas $y = 1$ e $y = x^2$.

Primeiramente, note que esse se trata da mesma questão resolvida no Exemplo 8.5. A única diferença será a abordagem, uma vez que aqui resolveremos pelo método das cascas cilíndricas.

A região a ser rotacionada está representada na Figura 8.20.

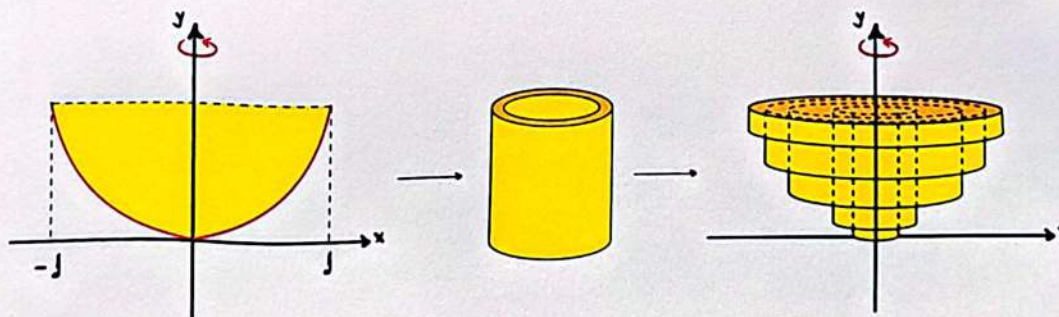


Figura 8.20: Região plana a ser rotacionada e sólido aproximado por cascas cilíndricas.

A região está compreendida entre $y = x^2$ (curva inferior) e $y = 1$ (reta horizontal superior). Para encontrar os limites em x , igualamos:

$$x^2 = 1 \implies x = -1 \text{ e } x = 1.$$

Assim, a região de integração está entre $x = -1$ e $x = 1$.

Para aplicar o método das cascas cilíndricas, determinamos a altura $h(x)$ da casca, que nesse caso será:

$$h(x) = 1 - x^2.$$

Portanto, o volume será:

$$V = 2\pi \int_{-1}^1 x(1 - x^2) dx.$$

Você pode efetuar a integral ou simplesmente observar que o integrando $x(1 - x^2)$ é uma função ímpar e, sendo o intervalo de integração simétrico em torno da origem, a integral se anula:

$$V = 0.$$

Porém, é nítido que isso não condiz com a realidade, uma vez que o sólido existe e, portanto, seu volume não é nulo. Isso ocorreu, porque o termo (x) da integral representa a **distância até o eixo de rotação** e, portanto, não pode ser negativo. Ao considerar o intervalo de integração $[-1, 1]$, admitimos distâncias negativas, o que, conseqüentemente, gera volumes negativos. O volume gerado pela rotação da região à esquerda do eixo y anula o da direita. Geometricamente, isso não faz sentido, de modo que, para resolver o problema, consideramos somente a região à direita do eixo y , fazendo com que o volume V seja calculado por:

$$V = 2\pi \int_0^1 x(1 - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 (x - x^3) dx.$$

Mais uma vez, a etapa subsequente é composta unicamente por contas. Realizando a integral, podemos constatar que o volume V é:

$$V = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo 8.9

Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -1$, da região limitada entre as curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x$.

Essa questão se trata da mesma proposta pelo Problema 8.12, com a diferença de que lá ela foi resolvida utilizando pelo método estudado anteriormente. Naturalmente, nosso objetivo nesse momento é resolvê-lo por Cascas Cilíndricas. Para tal, primeiramente, precisamos definir os pontos de interseção, que são rapidamente determinados por:

$$\sqrt{x} = x \implies x = 0 \text{ e } x = 1.$$

A região está entre $x = 0$ e $x = 1$, com $y = \sqrt{x}$ acima de $y = x$.

Observe que não podemos aplicar a Equação (8.7) de maneira direta, pois a rotação não está sendo feita em torno do eixo y e, sim, em torno de $x = -1$, ou seja, o eixo está deslocado. No entanto, podemos extrapolar a ideia dessa

equação, entendendo melhor cada termo da fórmula:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Termo x : representa a distância até o eixo de rotação (raio da casca cilíndrica);

Termo $f(x)$: representa a altura da casca.

Ou seja, de maneira mais genérica, podemos determinar o volume V do sólido fazendo:

$$V = 2\pi \int_a^b (\text{distância ao eixo de rotação}) \cdot (\text{altura da casca}) dx.$$

Neste caso:

(i) Distância até o eixo $x = -1$: $x - (-1) = x + 1$;

(ii) Altura da casca: $f(x) - g(x) = \sqrt{x} - x$.

A Figura 8.21 ilustra essa situação.

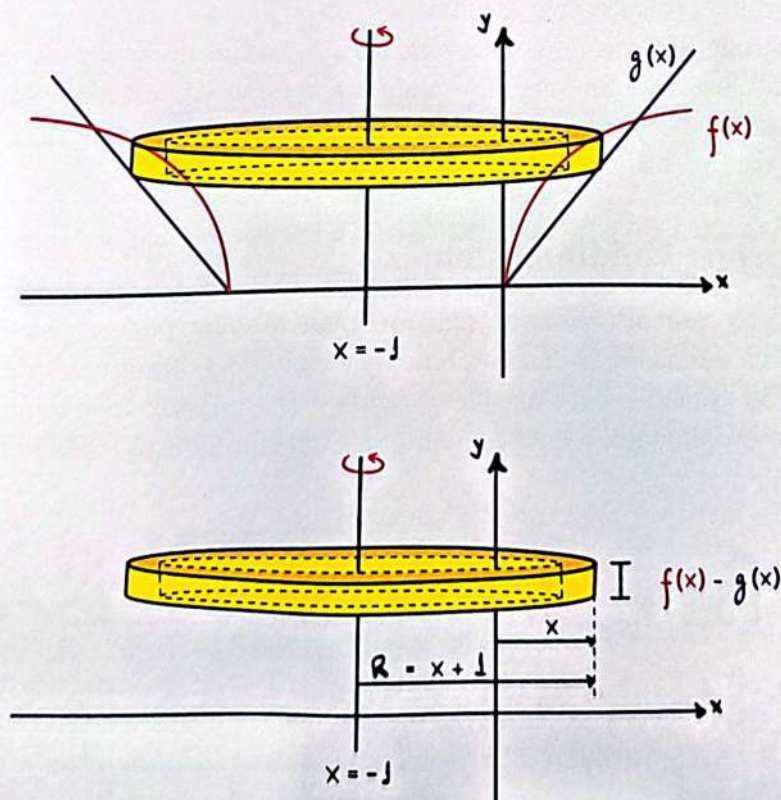


Figura 8.21: Casca cilíndrica deslocada.

Portanto, o volume V pode ser escrito como:

$$V = 2\pi \int_0^1 (x+1)(\sqrt{x}-x) dx.$$

A partir desse ponto, é mera formalidade e o leitor é perfeitamente capaz de efetuar as contas, donde conclui-se que o volume V do sólido é:

$$V = \frac{7\pi}{15}.$$

8.4 Centro de Massa

Na Física, um conceito bastante importante é o *Centro de Massa* (CM). O CM representa o ponto no qual toda a massa do sistema pode ser considerada concentrada e essa abstração é fundamental para o desenvolvimento de cálculos em várias áreas como a Mecânica e a Engenharia, permitindo analisar colisões, estabilidade de estruturas, órbitas, entre outros assuntos.

Uma vez que falamos de corpos extensos, o estudo do *centro de massa* é fundamentalmente baseado em integrais, conforme veremos. O estudo desse tópico será dividido em três subseções: corpos unidimensionais, corpos bidimensionais e corpos tridimensionais.

8.4.1 Corpos Unidimensionais

Começemos essa discussão da maneira mais simples possível, que consiste no caso em que há apenas dois corpos pontuais envolvidos, conforme a Figura 8.22(a), onde eles estão apoiados em uma barra rígida e sem massa. Esse foi um problema estudado por Arquimedes, o qual concluiu que, em equilíbrio, a seguinte relação deve ser satisfeita:

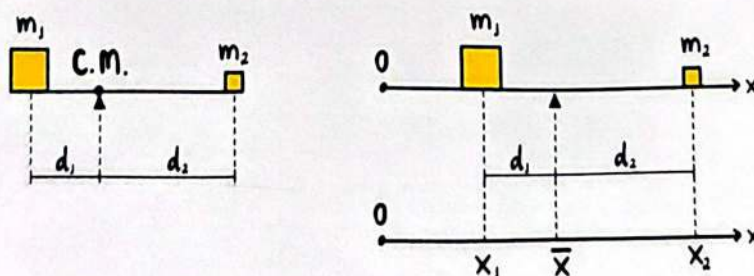


Figura 8.22: Posição do centro de massa de dois corpos pontuais.

$$m_1 d_1 = m_2 d_2. \quad (8.8)$$

As distâncias d_1 e d_2 são medidas justamente em relação ao CM, ou seja, ele representa a posição de equilíbrio do sistema.

Avançando um pouco com essa ideia, suponha que essa barra esteja sobre um sistema de coordenadas unidimensional, ou seja, sobre o eixo x , conforme a Figura 8.22(b). As posições das massas m_1 e m_2 são, respectivamente, dadas por x_1 e x_2 . A posição do centro de massa é denominada por $\bar{x}$. Aplicando a Equação (8.8), temos:

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x}),$$

que nos fornece:

$$\bar{x} = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.9)$$

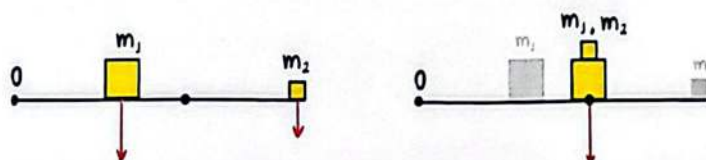


Figura 8.23: Centro de massa concentrando as massas do sistema.

É instrutivo imaginar que a posição do CM representa o ponto no qual deveríamos colocar toda a massa do sistema caso tivéssemos que concentrá-la em apenas um ponto, conforme a Figura 8.23. Pode-se, também, imaginar que esse é o ponto que geraria o mesmo momento (ou torque) caso as massas estivessem concentradas sobre ele. O equacionamento dessa ideia fica mais simples e nos permite extrapolar para o caso em que há mais massas. No caso de dois corpos, o equacionamento fica:

$$(m_1 + m_2) \bar{x} = m_1 x_1 + m_2 x_2,$$

em que do lado direito temos os momentos gerados por cada massa, em relação à origem, e do lado esquerdo teríamos o momento gerado pela massa total $(m_1 + m_2)$ localizada no centro de massa $\bar{x}$. Repare que, isolando o termo $\bar{x}$, chegaríamos à Equação (8.9). Agora pense no caso em que há n corpos pontuais com as respectivas massas iguais a $m_1, m_2, \dots, m_n$. Essa situação está representada na Figura 8.24(a). Com raciocínio análogo, poderíamos equacionar esse problema como:

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \bar{x} = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i,$$

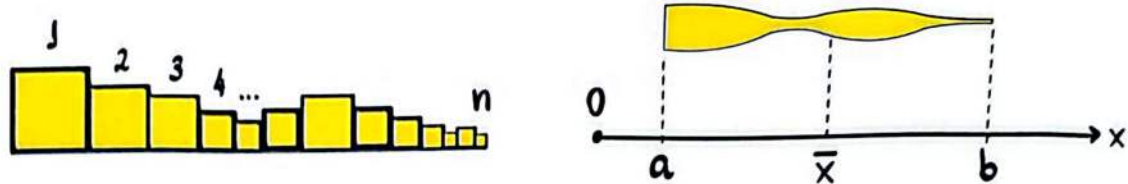


Figura 8.24: Barra contínua com densidade linear $\mu(x)$ variável.

de modo que a posição $\bar{x}$ do centro de massa seria dada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (8.10)$$

Observe que o denominador nada mais é do que a soma de todas as massas. Uma maneira clara e intuitiva de entender essa equação é enxergá-la como uma média ponderada em que $\bar{x}$ seria a média das posições x_i ponderadas pelas suas respectivas massas m_i .

Agora, partindo para o caso unidimensional mais geral, ao invés de considerar corpos pontuais discretos, considere uma barra contínua, mas não uniforme, ou seja, uma barra cuja densidade varia ao longo do seu comprimento segundo uma função $\mu(x)$. É como se ela fosse constituída de infinitos corpos pontuais conectados, cada qual com uma massa diferente, de maneira similar à situação anterior. Essa situação está representada na Figura 8.24(b).

O elemento infinitesimal de massa dm poderia ser relacionado ao elemento infinitesimal de comprimento dx segundo a equação:

$$dm = \mu(x) dx,$$

de forma que os somatórios da Equação (8.10) possam, aqui, ser vistos como integrais, como segue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i = \int_a^b dm = \int_a^b \mu(x) dx \quad (8.11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i x_i = \int_a^b x dm = \int_a^b x \mu(x) dx. \quad (8.12)$$

Dessa maneira, substituindo essas integrais na Equação (8.10), podemos determinar a posição $\bar{x}$ do centro de massa dessa barra por:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_a^b x \mu(x) dx}{\int_a^b \mu(x) dx}}.$$

Exemplo 8.10

Determine o centro de massa de uma barra disposta ao longo do eixo x , entre $x = 0$ e $x = L$, cuja densidade linear é dada por $\mu(x) = x^2$.

Substituindo $\mu(x) = x^2$, temos:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \cdot x^2 dx}{\int_0^L x^2 dx} = \frac{\int_0^L x^3 dx}{\int_0^L x^2 dx}.$$

Calculando as integrais e substituindo os seus valores, tem-se

$$\bar{x} = \frac{\frac{L^4}{4}}{\frac{L^3}{3}} = \frac{3L}{4}.$$

Portanto, o centro de massa da barra está localizado na posição

$$\boxed{\bar{x} = \frac{3L}{4}}.$$

Perceba que o centro de massa ficou mais próximo da extremidade direita $x = L$ da barra do que da extremidade esquerda, em $x = 0$. Isso ocorre porque a densidade $\mu(x) = x^2$ indica que tem-se mais massa concentrada quanto maior é o valor de x , de modo que, na “média ponderada”, isso “puxaria” o centro de massa mais para a extremidade direita, como o resultado indica ^a.

^aNo Exemplo 8.14, vamos computar a posição vertical do centro de massa de um cone, que é exatamente o mesmo problema que esse, uma vez que, analisando cortes verticais do cone, a sua área — e, portanto, a sua massa — cresce com o quadrado do raio, isto é, com x^2 , de modo que tem-se uma densidade que cresce de forma quadrática, indo do vértice do cone à sua base, sendo exatamente a mesma matemática modelada neste problema.

Exemplo 8.11

Mostre que a distância do centro de massa de um triângulo à sua base é igual a um terço da altura desse triângulo.

Em um primeiro momento, talvez esse problema cause certa estranheza ao leitor, uma vez que o triângulo se trata de uma figura bidimensional enquanto, até o momento, estamos trabalhando apenas com o caso unidimensional. Esse exemplo nos ajudará a abstrair o conceito e estender o campo de aplicação do que construímos até aqui.

O problema pode ser interpretado como se segue: a função $\mu(x)$ fornece a densi-

dade da barra ao longo do seu comprimento. Supondo que o triângulo é uniforme, ou seja, possui sua massa distribuída uniformemente por sua superfície, ele pode ser enxergado como uma barra cuja densidade varia linearmente com seu comprimento, uma vez que sua largura aumenta linearmente ao longo de sua altura. A Figura 8.25 ilustra essa situação.

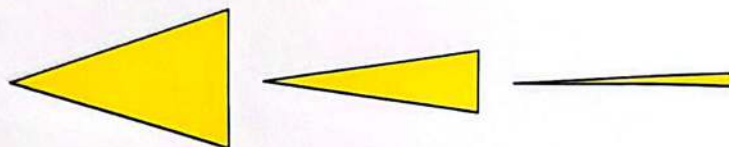


Figura 8.25: Triângulo como barra de densidade linear.

Dessa maneira, podemos modelar o problema como:

$$\mu(x) = kx.$$

Calculando cada uma das integrais individualmente, temos:

$$\begin{aligned}\int_0^L x \mu(x) dx &= \int_0^L x kx dx = k \frac{L^3}{3}. \\ \int_0^L \mu(x) dx &= \int_0^L kx dx = k \frac{L^2}{2}.\end{aligned}$$

Assim, a posição $\bar{x}$ do centro de massa será dada por:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \cdot \mu(x) dx}{\int_0^L \mu(x) dx} = \frac{kL^3/3}{kL^2/2} = \frac{2}{3}L.$$

Esse é um resultado certamente conhecido pelo leitor e atesta que a distância do vértice do triângulo à linha do centro de massa é $2/3$ de sua altura. Ou seja, fica demonstrado que a distância do centro de massa à base é igual a $1/3$ de sua altura.

8.4.2 Corpos bidimensionais

O estudo da posição do centro de massa para corpos unidimensionais, por si só, já é uma ferramenta poderosa e possui boas aplicações. No entanto, extrapolar esse conceito de uma para duas dimensões não irá apenas *dobrar* a nossa capacidade e, sim, *multiplicá-la*. Sendo assim, considere a situação abaixo, na qual desejamos calcular a posição do centro de massa da figura formada pelos retângulos adjacentes ilustrados na Figura 8.26. Naturalmente, por se tratar de duas dimensões, a posição do centro de massa será agora dada por um par ordenado $(\bar{x}, \bar{y})$. Essa situação, também, é

ilustrada na Figura 8.26.

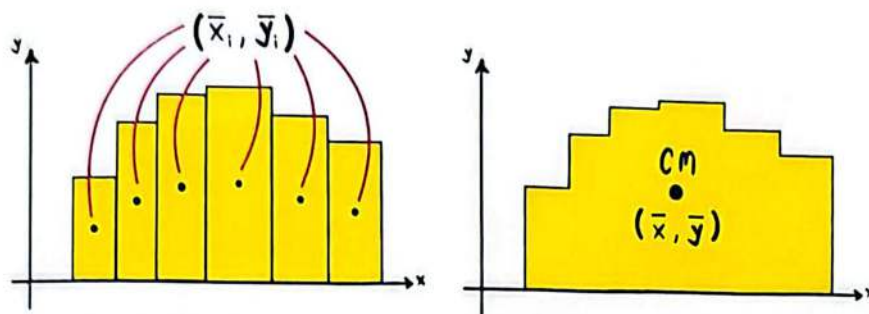


Figura 8.26: Centro de massa de uma região formada por retângulos adjacentes.

Uma observação importante é que agora, por tratarmos de figuras planas, passaremos a trabalhar com a *densidade superficial* $\sigma(x, y)$, que relaciona os elementos infinitesimais de massa dm e de área dA por:

$$dm = \sigma(x, y) dA.$$

Observe que, conforme explicitado, a densidade superficial pode ser uma função da posição, isto é, ela pode depender de x e de y .

Considere as seguintes notações:

m_i : Massa do retângulo i ;

x_i : Posição x do centro de massa do retângulo i ;

y_i : Altura do retângulo i ;

Δx_i : Largura da base do retângulo i .

σ_i : Densidade superficial do retângulo i .

Dessa maneira, a massa m_i do retângulo i é dada por:

$$m_i = \sigma_i A_i = \sigma_i y_i \Delta x_i.$$

Talvez passe despercebido a olhos desatentos, mas note que o problema foi simplificado com relação à densidade superficial. Uma vez que as massas foram consideradas a cada retângulo vertical, sua densidade foi considerada constante na vertical. Em outras palavras, consideramos que σ é uma função apenas de x , ou seja, $\sigma = \sigma(x)$.

Procedendo de maneira semelhante ao que fizemos no caso linear, a abscissa do centro de massa pode ser calculada por:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \\ &= \frac{x_1 \sigma_1 y_1 \Delta x_1 + x_2 \sigma_2 y_2 \Delta x_2 + \cdots + x_n \sigma_n y_n \Delta x_n}{y_1 \sigma_1 \Delta x_1 + y_2 \sigma_2 \Delta x_2 + \cdots + y_n \sigma_n \Delta x_n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i x_i y_i \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \sigma_i y_i \Delta x_i}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

Dando sequência, a ordenada do centro de massa é dada por:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\frac{y_1}{2}m_1 + \frac{y_2}{2}m_2 + \cdots + \frac{y_n}{2}m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \\ &= \frac{\frac{y_1}{2}\sigma_1 y_1 \Delta x_1 + \frac{y_2}{2}\sigma_2 y_2 \Delta x_2 + \cdots + \frac{y_n}{2}\sigma_n y_n \Delta x_n}{y_1 \sigma_1 \Delta x_1 + y_2 \sigma_2 \Delta x_2 + \cdots + y_n \sigma_n \Delta x_n} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i y_i^2 \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \sigma_i y_i \Delta x_i}.\end{aligned}\quad (8.14)$$

Repare que a posição vertical do centro de massa de cada retângulo é $y_i/2$, uma vez que está localizada na metade da altura de cada retângulo. Além disso, se considerarmos a densidade superficial constante, perceba que o termo σ_i pode ser simplificado nas Equações (8.13) e (8.14)¹. Com isso, os denominadores passam a representar a soma das áreas dos retângulos, ou seja, representam a área total da figura. Dessa maneira, essas equações podem ser simplificadas como:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n x_i y_i \Delta x_i \quad ; \quad \bar{y} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta x_i. \quad (8.15)$$

Para uma região literalmente formada por retângulos, essa é a equação a ser aplicada. Porém, essa não só é uma situação rara, como também, conforme adiantado ao leitor, nossa intenção principal é extrapolar esse raciocínio e aplicá-lo ao caso em que, ao invés de ter uma figura formada por retângulos, tenhamos uma figura cujo contorno superior seja determinado por uma curva genérica $f(x)$. Essa situação está representada na Figura 8.27. Repare que a altura y_i de cada retângulo pode ser escrita como $y_i = f(x_i)$.

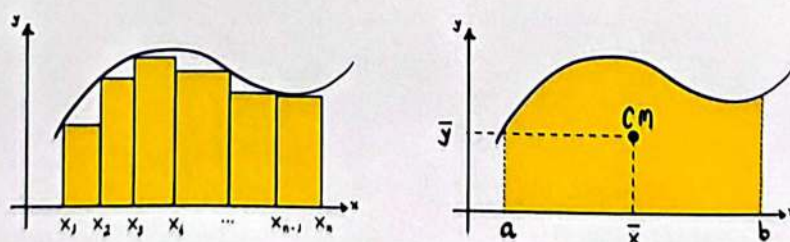


Figura 8.27: Centro de massa de uma região genérica aproximada por retângulos.

¹Note que, caso σ não fosse constante, o denominador das Equações (8.13) ou (8.14) forneceria a massa total do objeto, enquanto que os numeradores seriam funções apenas de x , uma vez que partimos da premissa que $\sigma = \sigma(x)$. Isso possibilitaria que o problema fosse reduzido a uma única variável x , o que o tornaria passível de ser resolvido com uma integral simples. O caso mais geral em que a densidade superficial depende de x e y , isto é, $\sigma = \sigma(x, y)$, exigiria integrarmos em duas dimensões, o que acarretaria em uma integral dupla.

Para calcular a posição $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa, basta pegar o limite das Equações (8.13) e (8.14) quando $n \rightarrow \infty$ e, conseqüentemente, cada um dos somatórios dessas equações se tornarão integrais, como segue:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma_i y_i \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma_i f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b \sigma(x) f(x) dx; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma_i x_i y_i \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma_i x_i f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b \sigma(x) x f(x) dx; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i y_i^2 \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i [f(x_i)]^2 \Delta x_i = \frac{1}{2} \int_a^b \sigma(x) [f(x)]^2 dx.\end{aligned}$$

Portanto, podemos finalmente escrever as expressões que fornecem as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa substituindo essas integrais nas Equações (8.13) e (8.14), como segue:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_a^b \sigma(x) x f(x) dx}{\int_a^b \sigma(x) f(x) dx};} \quad \boxed{\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b \sigma(x) [f(x)]^2 dx}{\int_a^b \sigma(x) f(x) dx}.} \quad (8.16)$$

Conforme comentado anteriormente, se considerarmos o material homogêneo (σ constante), esses termos σ podem ser simplificados nas frações das Equações (8.16) e, como consequência, os denominadores das referidas equações passam a representar a área da região cujo centro de massa desejamos calcular, de modo que possamos escrever as equações finais como:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x f(x) dx;} \quad \boxed{\bar{y} = \frac{1}{2A} \int_a^b [f(x)]^2 dx.} \quad (8.17)$$

Exemplo 8.12

Determine a posição do centro de massa da região formada pelos retângulos da Figura 8.28 a seguir:

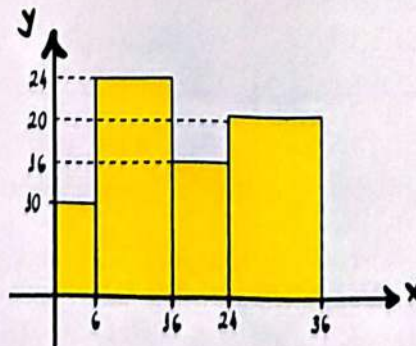


Figura 8.28: Retângulos adjacentes.

Esse problema pode ser resolvido diretamente através da aplicação das Equações (8.15). De acordo com a figura, podemos tirar:

$$\begin{array}{cccc} x_1 = 3 & x_2 = 11 & x_3 = 20 & x_4 = 30 \\ y_1 = 10 & y_2 = 24 & y_3 = 16 & y_4 = 20 \\ \Delta x_1 = 6 & \Delta x_2 = 10 & \Delta x_3 = 8 & \Delta x_4 = 12. \end{array}$$

Assim, a área A da região é:

$$A = 10 \cdot 6 + 24 \cdot 10 + 16 \cdot 8 + 20 \cdot 12 = 668.$$

Aplicando esses valores nas Equações (8.15), temos:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{668} [3 \cdot 10 \cdot 6 + 11 \cdot 24 \cdot 10 + 20 \cdot 8 \cdot 16 + 30 \cdot 120 \cdot 12] = \frac{6290}{668} \approx 18,83; \\ \bar{y} &= \frac{1}{2 \cdot 668} [10^2 \cdot 6 + 24^2 \cdot 10 + 16^2 \cdot 8 + 20^2 \cdot 12] = \frac{13208}{1336} \approx 9,89. \end{aligned}$$

Ou seja, a posição do centro de massa dessa figura está sobre o ponto $(\bar{x}, \bar{y}) = (18,83; 9,89)$.

Exemplo 8.13

Determine a posição do centro de massa de um semicírculo homogêneo de raio R .

A Figura 8.29 ilustra essa situação.

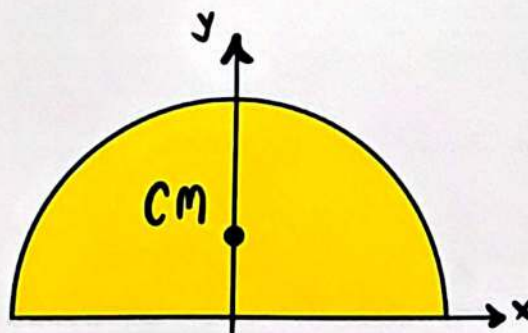


Figura 8.29: Centro de massa de um semicírculo homogêneo de raio R .

Posicionando a origem do sistema de coordenadas no centro do semicírculo, pela simetria da figura em relação ao eixo y , é imediato que:

$$\bar{x} = 0.$$

Para encontrar a coordenada $\bar{y}$, precisamos primeiro definir a função que delimita

a região bem como sua área. No caso atual, esses valores são dados por:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \quad ; \quad A = \frac{1}{2}\pi R^2,$$

e, além disso, a região de integração é entre $x = -R$ e $x = R$. Então, usando a Equação (8.17), temos:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{2 \frac{\pi R^2}{2}} \int_{-R}^R \left[\sqrt{R^2 - x^2} \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx. \end{aligned}$$

A resolução dessa integral é simples, fornecendo $\bar{y} = 4R/3\pi$. Em valores aproximados, temos $\bar{y} \approx 0,42R$. De modo exato, a posição do centro de massa do círculo é dada por

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{4R}{3\pi} \right).$$

8.4.3 Corpos tridimensionais

A essa altura, o leitor certamente encontra-se empolgado com a nova habilidade que adquirira e, conseqüentemente, deve estar curioso para descobrir como calcular a posição do centro de massa de corpos tridimensionais; afinal, este é o mundo em que vivemos. No entanto, antes de iniciarmos o equacionamento desse problema, cabe uma discussão importante.

Neste livro, não foram estudadas integrais duplas ou triplas. Ainda assim, fomos capazes de determinar a posição do centro de massa de corpos bidimensionais genéricos, com absolutamente nenhuma restrição quanto à geometria da figura — a única restrição feita foi com relação à homogeneidade do material². No entanto, no caso de problemas tridimensionais, ficaremos restritos a figuras com simetria axial ou plana, como cones ou pirâmides, por exemplo. Assim, o questionamento que fica é o seguinte:

Por que conseguimos resolver quase qualquer problema de corpos bidimensionais e, no entanto, os tridimensionais trazem consigo essa restrição?

Se o leitor foi capaz de responder essa pergunta de maneira correta, mostra um alto grau de maturidade e de domínio do que estamos fazendo. Porém, se não foi o caso, fique tranquilo: esse não é um fato muito simples de ser enxergado.

²Conforme já pontuamos anteriormente, o material sequer precisaria ser homogêneo, bastaria que sua densidade dependesse de apenas uma das variáveis, isto é, $\sigma(x, y) = \sigma(x)$.

Esse livro é dedicado ao estudo do Cálculo em uma variável. Ou seja, as ferramentas que desenvolvemos nos permitem efetuar integrais com relação a uma única variável. Portanto, é imediato que problemas unidimensionais são facilmente resolvíveis. No entanto, os problemas bidimensionais também o são, pois, através de uma função, conseguimos relacionar as duas variáveis do problema, a saber, x e y . Como y pode ser escrito em função de x com $y = f(x)$, em última análise, o problema se torna dependente de apenas uma variável. Portanto, fica passível de ser resolvido em termos de uma integral simples³.

Entretanto, a pergunta que fica é: “e o que acontece em problemas tridimensionais?” Pois bem. Um problema tridimensional genérico pode ser escrito em termos de três variáveis, a saber, x , y e z . Poderíamos, então, escrever uma das variáveis em função das outras, por exemplo, como $z = f(x, y)$. Ainda teríamos duas variáveis independentes: x e y . Portanto, para sua resolução teríamos que lançar mão, pelo menos, de integrais duplas⁴. Para sermos capazes de resolver esse problema com uma integral simples, teríamos que ser capazes de escrever a geometria do problema em termos só de uma variável. A variável y teria que depender exclusivamente de x , ou seja, $y = g(x)$. Dessa maneira, em última análise, a variável z seria função exclusivamente de x , ou seja, $z = f(x, y) = f(x, g(x)) = h(x)$. Em outras palavras, uma única variável seria capaz de descrever todo o problema.

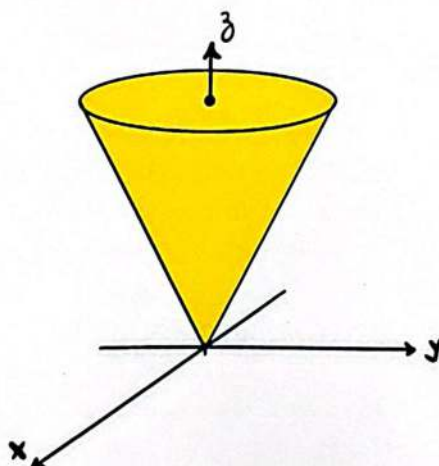


Figura 8.30: Simetria axial no cone.

Dá a necessidade da simetria dupla, por exemplo, com relação a x e y . A simetria axial é o caso que melhor ilustra essa situação. Observe, por exemplo, o caso do cone, como ilustra a Figura 8.30. O problema pode ser inteiramente escrito em termos de x . Veja que, dada uma determinada coordenada z qualquer, por exemplo, $z = 2$, é

³Desde que a densidade seja constante ou dependa de apenas uma variável, como já observado. O caso geral $\sigma = \sigma(x, y)$ faz com que a determinação de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ necessariamente envolva uma integração bidimensional.

⁴Admitindo material homogêneo ou cuja densidade dependa apenas de x e y , mas não de z , pois, neste caso, apenas integrais triplas poderiam resolvê-lo.

possível definir exatamente o formato da seção. Uma única informação é capaz de descrever a geometria do problema.

Dito isso, podemos começar nossa formulação. No entanto, devido à simetria em relação a dois eixos, esse problema se torna tão simples quanto o do caso unidimensional. Absolutamente análogo. Por formalidade, consideremos um sólido genérico com simetria com relação aos eixos x e y , conforme a Figura 8.31. Naturalmente, as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ do centro de massa são tais que $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = 0$. Para o cálculo de $\bar{z}$, façamos:

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_n) \bar{z} = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n,$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \bar{z} = \sum_{i=1}^n m_i z_i.$$

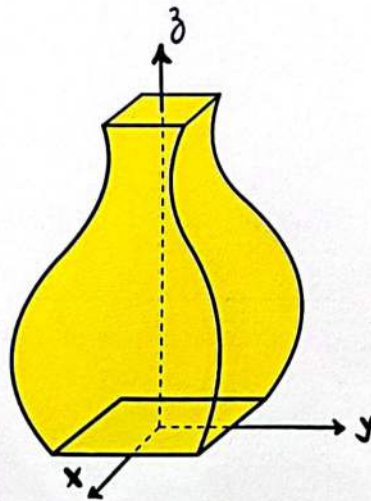


Figura 8.31: Sólido com simetria dupla em relação a x e a y .

Considerando um material com densidade volumétrica $\rho = \rho(z) = dm/dV$, temos $m = \rho V$, onde V é o volume (repare no fato de que precisamos escrever o problema em função de apenas uma variável, ou seja, devemos, então, considerar a densidade dependente, no máximo, de z)⁵. Assim, podemos escrever a coordenada $\bar{z}$ do centro de massa como:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i A_i \Delta z \cdot z_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i A_i \Delta z}.$$

⁵Do contrário, se $\rho = \rho(x, y)$, ou se $\rho = \rho(x, y, z)$, a integração teria que acontecer, necessariamente, em duas ou três dimensões.

Observe que essa equação é inteiramente análoga à Equação (8.10). Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, esses somatórios se tornam integrais e podemos finalmente escrever:

$$\bar{z} = \frac{\int z \rho(z) A(z) dz}{\int \rho(z) A(z) dz}. \quad (8.18)$$

Se fizermos a consideração de um corpo homogêneo, ou seja, $\rho(z)$ constante, repare que os termos $\rho(z) = \rho$ na Equação (8.18) se cancelarão e, de maneira análoga ao que ocorreu no casos unidimensional e bidimensional, o denominador dessa equação consistirá no volume do sólido, ou seja, a posição $\bar{z}$ do centro de massa pode ser escrita de maneira simplificada como:

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \int z A(z) dz. \quad (8.19)$$

Exemplo 8.14

Determine a posição do centro de massa $\bar{z}$ de um cone reto e homogêneo com altura H e raio da base R .

Consideremos o cone da Figura 8.32 onde a origem do sistema está localizada no vértice desse cone.

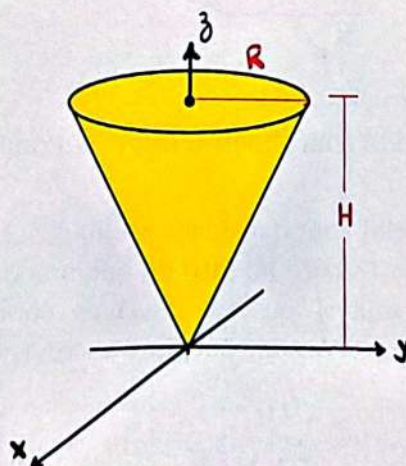


Figura 8.32: Cone circular reto com vértice na origem do eixo z .

O cone pode ser pensado como formado por discos horizontais de espessura dz , empilhados ao longo do eixo z , de $z = 0$ até $z = H$.

O raio de cada disco a uma altura z é proporcional a z , pois a largura do cone

aumenta linearmente. Assim,

$$r(z) = \frac{R}{H}z.$$

Então, a área $A(z)$ da seção em cada altura z é:

$$A(z) = \pi \cdot r(z)^2 = \pi \left(\frac{R}{H}z \right)^2 = \pi \frac{R^2}{H^2} z^2.$$

Definida essa função, basta calcular a integral da Equação (8.19):

$$\int_0^H z A(z) dz = \int_0^H z \pi \frac{R^2}{H^2} z^2 dz = \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H z^3 dz = \frac{\pi R^2 H^2}{4}.$$

Lembrando que o volume do cone é dado por $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$, temos finalmente:

$$\bar{z} = \frac{\frac{\pi R^2 H^2}{4}}{\frac{\pi R^2 H}{3}},$$

ou seja,

$$\boxed{\bar{z} = \frac{3}{4}H.}$$

Portanto, o centro de massa do cone se encontra a $\frac{3}{4}$ da altura do cone, quando medido a partir do vértice.

Diga-se de passagem, não sei se perceberas, caro leitor, o homem que vos escreve já havia lhe dado uma alfinetada com relação à essa ideia no Exemplo 8.10, em que a densidade linear de uma barra variava por uma função quadrática com relação ao comprimento. Consegue perceber que aqui resolvemos, em certa medida, o mesmo problema?

8.5 Aplicações Gerais

A quantidade de situações nas quais as integrais são aplicadas para modelar ou resolver problemas beira o infinito. Algumas delas já lhe foram apresentadas, caro leitor, mas há aplicações em todas as áreas do conhecimento: Matemática, Física, Biologia, Probabilidade, Economia, Engenharia, etc. Mesmo que esse livro tivesse o triplo do número de páginas, ainda assim ele seria curto demais para apresentar todas essas aplicações. Dessa maneira, essa seção é reservada à apresentação de aplicações gerais, aquelas que julgamos serem as mais importantes no que se refere ao engrandecimento do conhecimento e repertório do leitor, sendo a maior parte delas envolvendo a Matemática e a Física.

8.5.1 Valor médio de uma função

No Capítulo 5, mais precisamente na Seção 5.2.2, o leitor foi apresentado ao **Teorema do Valor Médio (TVM)**. Lembre-se que, naquela situação, falávamos sobre *derivadas*. Mais precisamente, o TVM dizia que para uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b) , sempre haverá um valor $c \in [a, b]$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

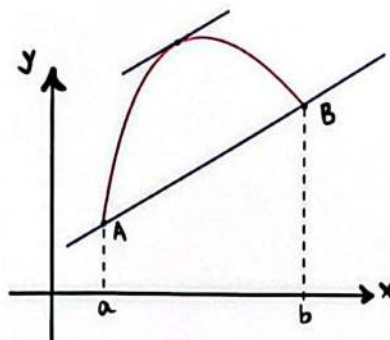


Figura 8.33: Teorema do Valor Médio para derivadas.

Tal teorema será referenciado, a partir de agora, como **TVM para derivadas**. A Figura 8.33 traduz a ideia apresentada na equação. Façamos agora uma discussão sobre uma ideia semelhante, mas agora do ponto de vista da integração.

Para ilustrar essa ideia, suponha que você vá fazer uma viagem de carro até um destino cuja distância você não conhece e seu objetivo é calcular a velocidade média na viagem. Uma solução muito óbvia seria simplesmente dividir a distância total percorrida pelo tempo gasto. Claro, isso resolveria o problema imediatamente. No entanto, suponha que as únicas ferramentas à sua disposição sejam o velocímetro do carro e um relógio, ou seja: seu carro não possui hodômetro, não há placas indicando distâncias ou qualquer outro recurso. Sendo assim, fica o questionamento:

Como você, digníssimo e honroso leitor, poderia computar a velocidade média associada ao percurso integral do trajeto?

A solução seria medir a velocidade do carro ao longo do trajeto o maior número de vezes possível, anotando o intervalo de tempo em que essas medições são executadas. Quanto maior o número de medições, melhor seria a sua aproximação. No caso em que forem feitas n medições, a velocidade média v_m seria calculada por:

$$v_m = \frac{v_1 \cdot \Delta t_1 + v_2 \cdot \Delta t_2 + \cdots + v_n \cdot \Delta t_n}{t_f - t_i} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i \cdot \Delta t_i}{t_f - t_i}, \quad (8.20)$$

onde t_i e t_f representam, respectivamente, os tempos de início e fim das medições.

A Figura 8.34 representa situações nas quais foram feitas 3, 5, 10 e 30 medições ao longo do trajeto. Observe que, com 3 medições, é impossível prever o formato da curva. Porém, à medida que o número de medições aumenta, o formato da curva vai ficando cada vez mais claro, de modo que, com 30 medições, o formato da curva fica praticamente definido.

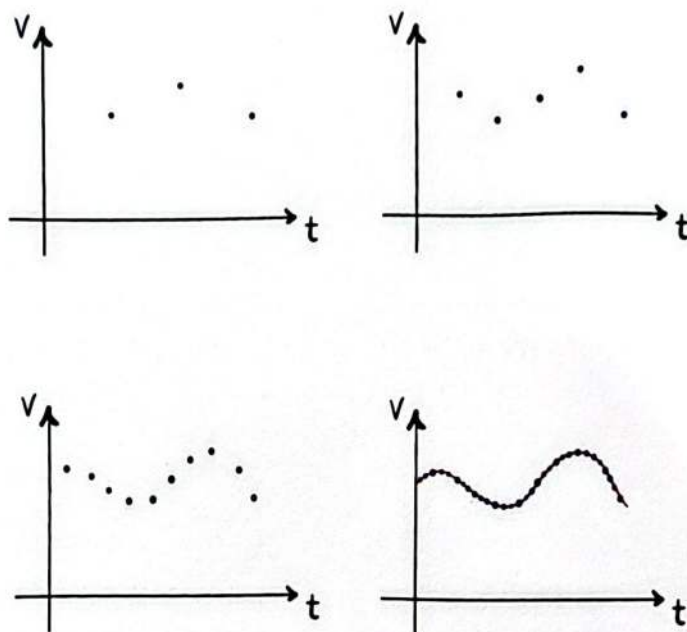


Figura 8.34: Pontos de avaliação da velocidade.

Abstraindo agora para o caso em que essa velocidade pudesse ser monitorada continuamente, ou seja, efetuando um número infinito de medições ($n \rightarrow \infty$), como já é de praxe, o somatório da Equação (8.20) se transformaria em uma integral, como segue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v_i \cdot \Delta t_i = \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt,$$

e, dessa maneira, a Equação (8.20) poderia ser reescrita de maneira que a velocidade média v_m seria dada por:

$$v_m = \frac{\int_{t_i}^{t_f} v(t) dt}{t_f - t_i}.$$

Observe que essa equação corrobora com o que havíamos argumentado desde o início, uma vez que o numerador nada mais é do que a distância total percorrida. O importante aqui é que tal distância foi computada, como a própria integral indica, apenas por meio de medidas da velocidade $v(t)$ do carro e de intervalos de tempo dt , que eram as ferramentas que tínhamos: um velocímetro e um relógio.

Podemos generalizar essa situação e enunciar o **Teorema do Valor Médio para Integrais** como segue:

Teorema do Valor Médio para Integrais

Teorema. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$. Então, existe um valor $c \in (a, b)$ tal que

$$f_m = f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}, \quad (8.21)$$

onde f_m é o valor médio de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

Graficamente, o TVM para integrais diz que $x = c$ é o valor tal que $f(c)$ é a altura do retângulo de base $(b - a)$ que possui a mesma área que a região abaixo da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. A Figura 8.35 ilustra essa situação.

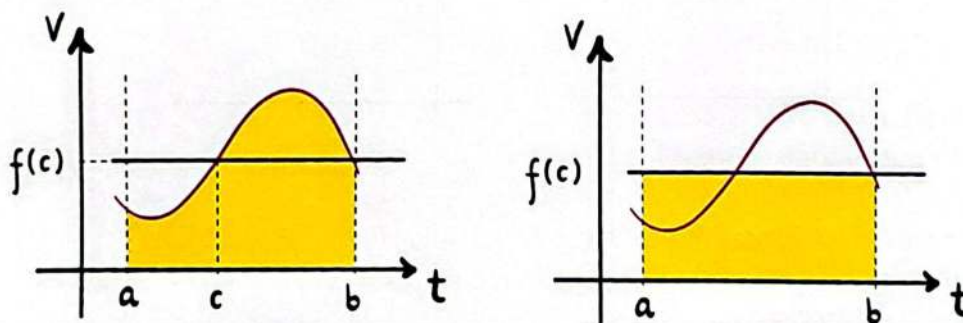


Figura 8.35: Visualização do TVM para integrais.

Demonstração

Um ponto interessante é perceber que essa versão é uma consequência direta do TVM para derivadas juntamente com o TFC. Partindo da Equação (5.2.2), substituindo pela função $g(x)$, sabemos que existe um valor $c \in (a, b)$ tal que:

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}. \quad (8.22)$$

Seja agora $f(x)$ a derivada de $g(x)$, ou seja, $g(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$:

$$f(x) = g'(x) \implies g(x) = F(x). \quad (8.23)$$

Assim, de imediato, segue que $g'(c) = f(c)$, e, aplicando o Teorema Fundamental do

Cálculo, temos:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = g(b) - g(a). \quad (8.24)$$

Assim, aplicando os resultados das Equações (8.23) e (8.24) em (8.22), temos:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

Exemplo 8.15

Calcule o valor médio da função $f(x) = -x^2 + 8x - 7$ no intervalo $[2, 5]$. Faça o esboço dessa situação.

Aplicando o TVM para integrais com a função fornecida, temos:

$$f_m = \frac{1}{5-2} \int_2^5 (-x^2 + 8x - 7) dx = \frac{1}{3} 24 = 8.$$

Ou seja, o valor médio f_m da função no intervalo pedido é:

$$f_m = 8.$$

A Figura 8.36 ilustra essa situação.

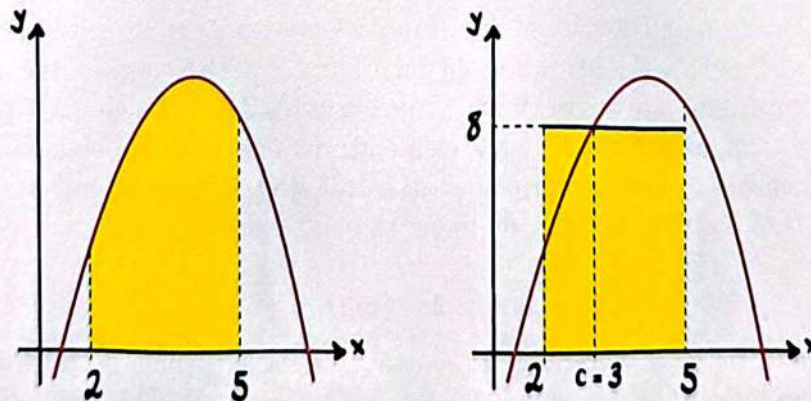


Figura 8.36: Gráfico de $f(x)$ e seu valor médio f_m .

8.5.2 Área de Superfície de Revolução

Na Seção 8.2 foi apresentada ao leitor uma metodologia para o cálculo do comprimento de curvas definidas por uma função genérica $f(x)$. Nosso objetivo nessa

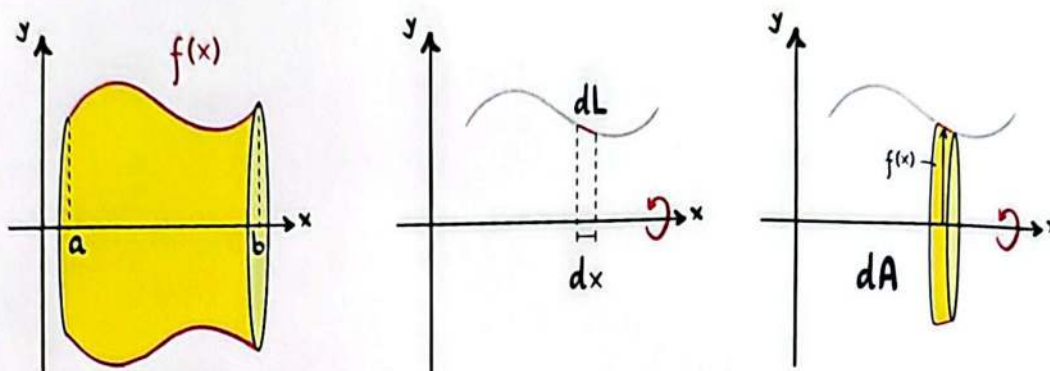


Figura 8.37: Superfície de revolução genérica.

subseção é aplicar esse conhecimento e, com ele, calcular áreas de superfícies de revolução. O ponto de partida foi o cálculo do elemento infinitesimal de comprimento dL que, conforme a Equação (8.1), é dado por

$$dL = \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Além disso, é elementar, da Geometria Espacial, que a área lateral A_L de um cilindro circular reto cujo raio da base mede R e altura mede h é dada por:

$$A_L = 2\pi Rh.$$

Acredite ou não, mas com apenas essas duas ideias, juntamente às integrais, é possível calcular a área superficial de qualquer sólido de revolução. Para isso, considere a superfície gerada pela rotação de uma função genérica $f(x)$ em torno do eixo x . A Figura 8.37(a) ilustra essa situação. Já na Figura 8.37(b) considera-se apenas um elemento infinitesimal dL dessa curva e, na Figura 8.37(c) o elemento infinitesimal de área dA gerado pela rotação desse elemento dL em torno do eixo x . Devido às pequenas dimensões, podemos aproximar essa área dA pela área lateral de um cilindro de raio $R = f(x)$ e altura $h = dL$, de maneira que teremos:

$$dA = 2\pi f(x)dL.$$

Dessa maneira, para obtermos a área total A da superfície de revolução, basta integrarmos ao longo do comprimento desejado, ou seja,

$$A = \int dA = \int 2\pi f(x)dL.$$

Escrevendo em termos de x , a área A será dada por:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (8.25)$$

Exemplo 8.16

Demonstre, utilizando a fórmula da superfície de revolução, que a área lateral de um cone de raio R e geratriz g é $A = \pi Rg$.

Podemos obter a área lateral de um cone ao girar um segmento de reta em torno do eixo x . Suponha que esse segmento representando a geratriz do cone vá do ponto $(0, 0)$ até (h, R) , conforme a Figura 8.38. Nesse caso, a equação da reta é:

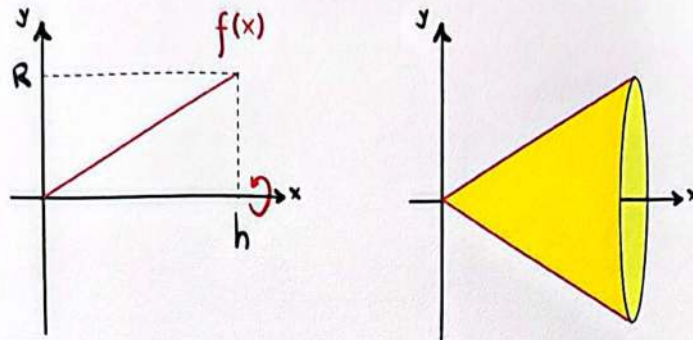


Figura 8.38: Superfície de revolução do cone — Rotação de uma reta.

$$y = \frac{R}{h}x.$$

A derivada de y em relação a x é:

$$y' = \frac{R}{h}.$$

Substituindo na Equação (8.25), a área A_L procurada será dada por:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^h \frac{R}{h}x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{R}{h}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \frac{R}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{R}{h}\right)^2} \int_0^h x dx. \end{aligned}$$

No cone de revolução, tem-se a relação $g^2 = h^2 + R^2$, assim, podemos simplificar a expressão como segue:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{R}{h}\right)^2} = \sqrt{\frac{h^2 + R^2}{h^2}} = \frac{g}{h}.$$

Dessa maneira, a integral pode ser escrita e resolvida como segue:

$$A = 2\pi \frac{R}{h} \frac{g}{h} \int_0^h x dx = 2\pi \frac{Rg}{h^2} \cdot \frac{h^2}{2} = \pi Rg.$$

Ou seja, está demonstrado que a área lateral A_L do cone é dada por $A_L = \pi Rg$.

8.5.3 Outros Problemas de Física

Conforme mencionado no início da presente seção, as integrais são utilizadas em várias áreas do conhecimento e seu uso é tão amplo que fica difícil até mesmo criar uma seção para cada uma das diferentes aplicações. Dessa forma, esta seção explora a resolução de problemas da Física que não dependem necessariamente do desenvolvimento de teoria ou equações específicas. Eles são resolvidos simplesmente partindo do raciocínio para casos discretos e modelando o problema por integrais na extensão para o caso contínuo.

Exemplo 8.17

Pressão Hidrostática e Força

Sabe-se que a pressão hidrostática P em um ponto localizado à profundidade h submerso em um líquido de densidade ρ é dada por:

$$P = \rho gh,$$

onde g é a aceleração da gravidade. Além disso, a força hidrostática F exercida por essa pressão é dada por:

$$F = P \cdot A,$$

onde A é a área sobre a qual a pressão P age. Dessa maneira, considere o problema a seguir.

Um cubo de aresta 2 m está totalmente submerso em um tanque com profundidade total de 5 m. Determine a força hidrostática (em newtons) exercida pela água sobre:

- (a) a face superior do cubo;
- (b) uma face lateral vertical do cubo.

Considere a densidade da água $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ e a aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$.

(a) Força sobre a face superior

A face superior está a 3 m abaixo da superfície da água. Como a pressão é constante nessa face, usamos:

$$P = \rho gh = 1.000 \cdot 10 \cdot 3 = 30.000 \text{ Pa.}$$

A área da face é: $A = 2 \cdot 2 = 4 \text{ m}^2$, de modo que a força hidrostática é:

$$F = P \cdot A = 30.000 \cdot 4 = \boxed{120.000 \text{ N.}}$$

(b) Força sobre uma face lateral

Essa face está na vertical e, como a pressão varia linearmente com a profundidade, a força sobre essa face, também, varia. Assim, não basta multiplicar a pressão pela área, como sugere a fórmula $F = P \cdot A$, afinal, não temos um valor constante de P para multiplicar. Surge, então, a necessidade de aplicar o conceito de integral. A pressão varia com a profundidade y segundo a função

$$P(y) = \rho g y = 10.000y.$$

Consideremos o elemento infinitesimal de área dA como um retângulo de largura 2 m e altura dy , de maneira que:

$$dA = 2dy.$$

Dessa forma, a força F sobre essa face será dada por:

$$\begin{aligned} F &= \int P dA \\ &= \int_3^5 10.000y \cdot 2dy \\ &= 20.000 \int_3^5 y dy \\ &= 20.000 \cdot 8 \\ &= \boxed{160.000 \text{ N.}} \end{aligned}$$

Portanto, as forças hidrostáticas são:

- (a) 120.000 N.
(b) 160.000 N.

A Figura 8.39 ilustra as forças existentes nas faces do cubo.

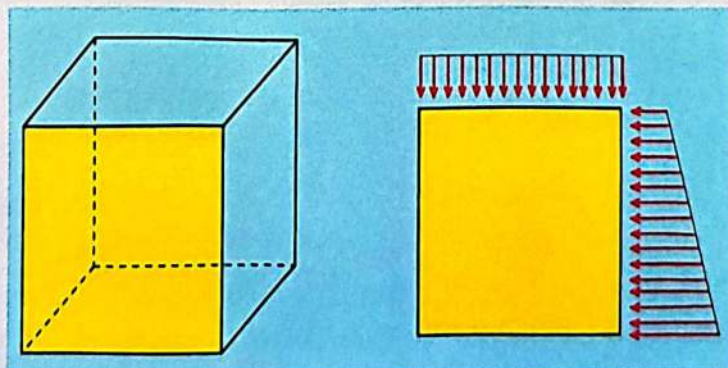


Figura 8.39: Visualização da força nas faces do cubo.

Exemplo 8.18**Trabalho**

Sabe-se que o trabalho W necessário para deslocar uma partícula por uma distância d através da aplicação de uma força constante F é dado por:

$$W = F d.$$

Dessa maneira, considere a seguinte situação: um tanque cilíndrico com raio 1 m e altura 10 m está completamente cheio de água. Deseja-se calcular o trabalho necessário para bombear toda a água até a parte superior do tanque, onde será despejada. Considere a densidade da água $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ e a gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Primeiramente, observe que não é possível utilizar a equação fornecida diretamente, pois qual deslocamento d seria considerado? Uma partícula de água perto da superfície precisa ser deslocada uma distância menor que uma partícula de água localizada a uma profundidade maior. Dessa maneira, pensemos em camadas. Vamos calcular o trabalho necessário para elevar cada camada de água até o topo do tanque.

Adotamos a coordenada y medindo a profundidade a partir da superfície da água, com $y = 0$ no topo e $y = 10 \text{ m}$ no fundo do tanque.

A cada profundidade y , consideramos uma lâmina de espessura dy , que deve ser elevada até o topo. A distância percorrida por essa lâmina é exatamente y metros. A área da base do tanque é:

$$A = \pi r^2 = \pi(1)^2 = \pi \text{ m}^2.$$

O volume da lâmina na profundidade y é:

$$dV = A \cdot dy = \pi dy.$$

A massa dessa lâmina de água é:

$$dm = \rho dV = 1.000\pi dy,$$

e a força peso correspondente é:

$$dF = dm \cdot g = 1.000\pi \cdot 10 dy = 10.000\pi dy.$$

Como essa lâmina deve ser elevada y metros até o topo, o trabalho infinitesimal é:

$$dW = dF \cdot y = 10.000\pi y dy.$$

O trabalho total é, portanto:

$$W = \int_0^{10} 10.000\pi y dy = 10.000\pi \int_0^{10} y dy.$$

Computando a integral, tem-se o trabalho total sendo

$$W = 10.000\pi \cdot 50 = 500.000\pi \text{ J} \approx \boxed{1.570.000 \text{ J.}}$$

Portanto, a energia necessária para bombear toda a água até o topo do tanque é aproximadamente $\boxed{1,57 \times 10^6 \text{ J.}}$

Exemplo 8.19

A força necessária para esticar uma mola a uma distância x de sua posição natural é dada por $F(x) = kx$, com F em newtons e x em metros, sendo k a constante elástica da mola. Calcule o trabalho necessário para esticar a mola da posição x_1 até x_2 .

Como a força varia com a posição, o trabalho realizado ao esticar a mola entre x_1 e x_2 é calculado somando os infinitesimais de trabalho dW que são realizados em deslocamentos infinitesimais dx , nos quais pode-se considerar que o deslocamento foi tão pequeno que a força $F(x)$ praticamente não se alterou. Assim, teríamos um trabalho infinitesimal

$$dW = -F(x) \cdot dx,$$

e o trabalho total seria dado pela soma contínua dessas contribuições infinitesimais^a:

$$\begin{aligned} W &= - \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx \\ &= - \left[\frac{1}{2} kx^2 \right]_{x_1}^{x_2} = - \left(\frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2 \right). \end{aligned}$$

A fórmula $E = kx^2/2$ certamente é conhecida pelo leitor dos seus estudos de física básica no ensino médio e computa a energia potencial elástica armazenada em uma mola que está distendida (comprimida ou esticada) de um tanto x em relação ao seu comprimento natural. A fórmula acima nos diz, portanto, que o trabalho para levar a mola de x_1 até x_2 é igual à menos a variação da sua energia potencial elástica, isto é:

$$W = -\Delta E_p,$$

que é o alicerce do Teorema da Conservação da Energia Mecânica.

^aO sinal negativo vem do fato de que, ao deslocar a mola, digamos, para a direita, isto é, $dx > 0$, a força feita pela mola tende a trazê-la de volta à posição original, ou seja, ela se manifesta para a esquerda.

Exemplo 8.20

Considere uma partícula que se move ao longo de uma linha horizontal, sendo sua velocidade em função do tempo dada por $v(t) = -A\omega \sin(\omega t)$, em que A e ω são constantes e t é o tempo.

Encontre a função $x(t)$ que fornece a posição da partícula em função do tempo, dado que em $t = 0$ a partícula se encontrava na posição $x = A$.

Ora, já sabemos que, em um movimento uniforme, isto é, com velocidade constante, a variação da posição Δx se relaciona com o intervalo de tempo Δt por meio de

$$\Delta x = v\Delta t,$$

em que v é a velocidade da partícula em movimento. A versão infinitesimal de tal equação seria

$$dx = v(t)dt,$$

que seria válida para velocidades não constantes, uma vez que, sendo o intervalo dt suficientemente pequeno, a velocidade $v(t)$ praticamente não varia de t para $t + dt$. Sendo assim, integrando a relação acima, teremos

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t v(t)dt,$$

obtendo-se

$$x(t) - x(0) = -A\omega \int_0^t \sin(\omega t)dt = A \cos(\omega t) \Big|_0^t = A \cos(\omega t) - A.$$

Note que a condição inicial $x(0) = A$ serve, em certa medida, como informação para que determinemos a constante de integração. Por fim, teremos a posição $x(t)$ da partícula em função do tempo dada por

$$\boxed{x(t) = A \cos(\omega t).}$$

Tais equações se referem ao Movimento Harmônico Simples, mas o procedimento feito acima pode ser generalizado para quaisquer outros tipos de movimento: sendo a velocidade a derivada da posição em relação ao tempo, a posição será dada pela integral da velocidade no tempo, que é o que fizemos.

8.6 Problemas

Seção 8.2 – Área entre Curvas

Problema 8.1 (*Área entre reta e parábola que se intersectam*). Calcule a área da região limitada entre as curvas $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(x) = x - 1$, no intervalo $[0, 4]$.

Problema 8.2 (*Área entre o módulo e uma função afim*). Calcule a área entre as curvas $y = |x|$ e $y = 2x$ no intervalo $[-2, 2]$.

Problema 8.3 (*Área entre as curvas trigonométricas*). As curvas $y = \sin(x)$ e $y = \cos(x)$ possuem infinitas interseções. Determine a área da região fechada delimitada por essas curvas entre os pontos onde ocorrem as duas primeiras interseções quando $x > 0$.

Problema 8.4 (*Área entre duas curvas em função de y*). Calcule a área da região limitada entre as curvas $x = y^2 - 4y + 7$ e $x = 2y + 2$.

Problema 8.5 (*Área de um triângulo via integrais*). Calcule, usando integrais, a área do triângulo cujos vértices são $A(1, 1)$, $B(7, 7)$ e $C(5, 9)$.

Seção 8.3 – Comprimento de Curvas

Problema 8.6 (*Função do comprimento de uma reta não-horizontal*). Considere a curva descrita pela função $y = 2x + 1$. Determine a função $L(t)$ que forneça o comprimento da curva entre os pontos $x = 3$ e $x = t$. Verifique se, de acordo com a Geometria Plana, esse era o resultado esperado. Em seguida, calcule o comprimento da curva no intervalo $[3, 8]$.

Problema 8.7 (*Demonstração do comprimento da circunferência*). Demonstre a fórmula do comprimento de uma circunferência de raio r usando a parte superior da curva que descreve essa circunferência.

Problema 8.8 (*Comprimento de curva polinomial com termo recíproco simples*). Determine a função $L(t)$ que forneça o comprimento da curva $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ no intervalo $[1, t]$.

Seção 8.4 – Volume

Problema 8.9 (*Volume da esfera por rotação do semicírculo*). Mostre que o volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ através da rotação de um semicírculo de raio r em torno de seu diâmetro.

Sugestão: Use o semicírculo delimitado pela semicircunferência superior de raio r cuja equação é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, em torno do eixo x no intervalo $[-r, r]$.

Problema 8.10 (*Volume do cone por rotação de uma reta*). Mostre que o volume de um cone de raio r e altura h pode ser obtido pela rotação, em torno do eixo x , da reta que liga a origem ao ponto (h, r) .

Problema 8.11 (*Volume por rotação em torno de reta horizontal fora do eixo*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 1$, da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = \sqrt{x}$.

Problema 8.12 (*Volume por rotação em torno da reta $x = -1$*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -1$, da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = \sqrt{x}$.

Problema 8.13 (*Volume por rotação em torno do eixo y – Função polinomial*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada entre a curva $y = 2x - x^3$ e o eixo x .

Problema 8.14 (*Volume por rotação da região entre $y = x^2$ e o eixo x*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x , da região limitada entre a curva $y = x^2$ e o eixo x , no intervalo $[0, 1]$, utilizando o método das cascas cilíndricas.

Seção 8.5 – Centro de Massa

Problema 8.15 (*Centro de massa de três corpos alinhados*). Três partículas estão dispostas sobre uma linha reta horizontal nas posições $x = 0$ m, $x = 3$ m e $x = 4,5$ m, com massas 2 kg, 4 kg e 4 kg, respectivamente. Determine a posição do centro de massa do sistema.

Problema 8.16 (*Barra com trecho removido*). Uma barra uniforme de 3 m de comprimento teve removido um trecho de 0,5 m entre as posições 1 m e 1,5 m. Determine a nova posição do centro de massa da barra incompleta.

Problema 8.17 (*Centro de massa de três partículas no plano*). Três partículas estão localizadas em um plano cartesiano, com as seguintes posições e massas:

- Massa $m_1 = 2$ kg no ponto $(0, 0)$;
- Massa $m_2 = 3$ kg no ponto $(4, 0)$;
- Massa $m_3 = 5$ kg no ponto $(2, 4)$.

Determine as coordenadas do centro de massa do sistema.

Problema 8.18 (*Centro de massa de três fios com densidade linear*). Considere o sistema formado pelos fios da Figura 8.40. Eles estão posicionados perpendicularmente nos pontos onde se conectam.

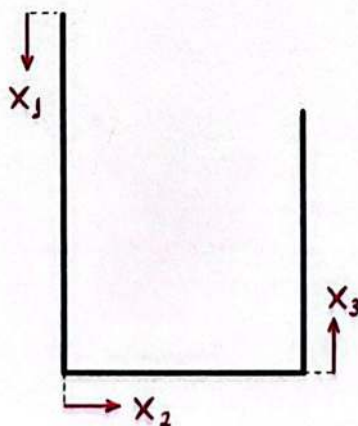


Figura 8.40: Fios com densidades lineares conectados.

Definindo um sistema de coordenadas próprio para cada fio, suas respectivas

densidades lineares $\mu(x)$ são dadas pelas funções:

Fio 01: $\mu_1(x_1) = 2x_1$;

Fio 02: $\mu_2(x_2) = 3x_2$;

Fio 03: $\mu_3(x_3) = 4x_3$.

Sabendo que seus comprimentos são, respectivamente, $L_1 = 12$, $L_2 = 6$ e $L_3 = 9$, determine a posição do centro de massa desse sistema.

Problema 8.19 (*Centro de massa de um trapézio isósceles*). Considere um trapézio isósceles com bases a e b e altura h localizado em um sistema cartesiano no qual a base inferior do trapézio esteja sobre o eixo x e o eixo y esteja orientado para cima.

- Determine a coordenada $\bar{y}$ do centro de massa desse trapézio, assumindo densidade constante.
- Discuta como esse resultado pode ser aplicado para encontrar o centro de massa de um triângulo.

Problema 8.20 (*Centro de massa da região entre $y = x^2$ e $x = y^2$*). Considere a região do plano limitada pelas curvas $y = x^2$ e $x = y^2$. Determine as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centro de massa dessa região, assumindo densidade constante.

Problema 8.21 (*Centro de massa de um hemisfério*). Determine a posição do centro de massa de um hemisfério homogêneo de raio R .

Seção 8.6 – Aplicações Gerais

Problema 8.22 (*Temperatura média ao longo de 12 horas*). A temperatura $T(x)$, em graus Celsius, medida ao longo de 12 horas do dia, é modelada pela função:

$$T(x) = 30\pi \left(\cos \left(\frac{\pi x}{24} \right) \right)^3 \cdot \sin \left(\frac{\pi x}{24} \right),$$

onde x representa o tempo em horas, com $x \in [0, 12]$. Calcule a temperatura média nesse intervalo.

Problema 8.23 (*Área da superfície de uma esfera por revolução*). Utilize a fórmula da superfície de revolução para demonstrar que a área da superfície de uma esfera de raio R é:

$$A = 4\pi R^2.$$

Considere a esfera gerada pela rotação do semicírculo superior em torno do eixo x .

Problema 8.24 (*Área lateral de um tronco de cone por revolução*). Calcule a área lateral de um tronco de cone com altura $h = 3$ e raios das bases $r_1 = 2$ e $r_2 = 5$.

Sugestão: Utilize a superfície de revolução obtida pela rotação da reta $y = x + 2$, no intervalo $[0, 3]$, em torno do eixo x .

Problema 8.25 (*Força hidrostática sobre uma placa triangular*). Considere uma placa fina com formato de triângulo isósceles de base horizontal 4 m e altura 6 m está totalmente submersa na água, verticalmente, com sua base apoiada no fundo de um tanque. O tanque está cheio até 10 m de profundidade. Calcule a força hidrostática exercida pela água sobre a placa. Considere a densidade da água $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ e aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Problema 8.26 (*Força hidrostática sobre uma placa semicircular*). Uma placa de formato semicircular está submersa verticalmente em um tanque cheio de água, com o diâmetro horizontal apoiado no fundo do tanque. O raio da placa é 1 m e o tanque tem profundidade total de 4 m. Calcule a força hidrostática total exercida pela água sobre a face da placa. Use $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Problema 8.27 (*Trabalho para bombear água de uma pirâmide de 6 metros de altura*). Um tanque em forma de pirâmide de base quadrada está totalmente cheio de água. A pirâmide tem altura 6 m, e sua base está na superfície da água, com lado de 2 m. O vértice da pirâmide está no fundo. Deseja-se calcular o trabalho necessário para bombear toda a água até um ponto 2 m acima da superfície do tanque. Considere a densidade da água $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ e a gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Problema 8.28 (*Trabalho para esticar uma mola com força não linear*). A força necessária para esticar uma determinada mola a uma distância x de sua posição natural é dada por $f(x) = 60x^2$, com f em newtons e x em metros. Calcule o trabalho necessário para esticar a mola da posição $x = 0 \text{ m}$ até $x = 0,5 \text{ m}$.

8.7 Exercícios

Seção 8.2 – Área entre Curvas

Exercício 8.29 (*Área entre as parábolas $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$*). Calcule a área da região limitada entre as curvas $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$.

Exercício 8.30 (*Área entre as curvas $y = x^2 - 5x + 3$ e $y = -x$*). Calcule a área da região limitada entre as curvas $y = x^2 - 5x + 3$ e $y = -x$.

Exercício 8.31 (*Área entre as curvas $x = y^2$ e $x = 2 - y$*). Calcule a área da região limitada entre as curvas $x = y^2$ e $x = 2 - y$.

Exercício 8.32 (*Área entre as curvas $y = x^3$ e $y = x$*). Calcule a área da região limitada entre as curvas $y = x^3$ e $y = x$.

Exercício 8.33 (*Área entre as curvas $y = |x|$ e $y = -x^2 + 6$*). Calcule a área da região limitada entre as curvas $y = |x|$ e $y = -x^2 + 6$.

Exercício 8.34 (*Área de um triângulo via integrais e validação geométrica*). Calcule, usando integrais, a área do triângulo cujos vértices são $A(2, 2)$, $B(10, 6)$ e $C(8, 8)$. Em seguida, valide o resultado utilizando Geometria Plana.

Seção 8.3 – Comprimento de Curvas

Exercício 8.35 (*Comprimento de uma reta não-horizantal*). Calcule o comprimento da curva $y = 3x/4 + 1$ no intervalo $[2, 10]$.

Exercício 8.36 (*Comprimento de curva polinomial*). Determine a função $L(t)$ que forneça o comprimento da curva $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln(x)$ no intervalo $[1, t]$.

Seção 8.4 – Volume

Exercício 8.37 (*Volume por rotação da função $y = \sin(x)$*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da curva $y = \sin(x)$ em torno do eixo x , no intervalo $[0, \pi]$.

Exercício 8.38 (*Volume por rotação da função $y = e^x$*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da curva $y = e^x$ em torno do eixo x , no intervalo $[0, 1]$.

Exercício 8.39 (*Volume por rotação da função $y = \ln(x)$ em torno do eixo y*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da curva $y = \ln(x)$ em torno do eixo y , no intervalo $[-1, 0]$.

Exercício 8.40 (*Volume por rotação da região entre $y = x$ e $y = \sqrt{x}$ em torno de $y = 2$*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 2$, da região limitada entre as curvas $y = x$ e $y = \sqrt{x}$.

Exercício 8.41 (*Volume por rotação da região entre $y = x^2$ e $x = y^2$ em torno do eixo x*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x , da região limitada entre as curvas $y = x^2$ e $x = y^2$.

Exercício 8.42 (*Volume por rotação da região entre $y = x^2$ e $x = y^2$ em torno da reta $y = -2$*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = -2$, da região limitada entre as curvas $y = x^2$ e $x = y^2$.

Exercício 8.43 (*Volume por rotação da região entre função cúbica*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -1$, da região limitada pelas curvas $y = x^3$, $y = 0$ e $x = 1$.

Exercício 8.44 (*Volume por rotação da região entre $y = \cos(x^2)$ em torno do eixo y*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada pela curva $y = \cos(x^2)$ e o eixo x , no intervalo $[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$. Tente usar ambos os métodos e veja se algum deles apresenta vantagem.

Exercício 8.45 (*Demonstração do volume da esfera com cascas cilíndricas*). Demonstre, utilizando o método das cascas cilíndricas, que o volume de uma esfera de raio r , centrada na origem, é dado por $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Exercício 8.46 (*Volume por rotação da região limitada por função cúbica*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada pela curva $y = x^3$, pelo eixo x e pela reta vertical $x = 2$.

Exercício 8.47 (*Volume por rotação da região abaixo da curva exponencial modificada*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada entre a curva $y = e^{1-x^2} - 1$ e o eixo x , considerando apenas a parte da curva situada acima do eixo x .

Exercício 8.48 (*Volume por rotação da região limitada por hipérbole*). Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada pela curva $y = \frac{1}{x}$, entre $y = 1$ e $y = 2$.

Seção 8.5 – Centro de Massa

Exercício 8.49 (*Centro de massa de duas barras coladas*). Duas barras finas e retilíneas são coladas extremidade a extremidade: a primeira tem 1 m de comprimento e massa 3 kg, e a segunda tem 2 m e massa 1 kg. Determine a posição do centro de massa do sistema.

Exercício 8.50 (*Centro de massa de um fio com densidade variável*). Um fio retilíneo de comprimento 3 m possui densidade linear variável dada por $\lambda(x) = 2x$, onde x é a distância da extremidade esquerda em metros. Determine a posição do centro de massa do fio.

Exercício 8.51 (*Centro de massa de um fio com densidade simbólica*). Um fio retilíneo de comprimento L tem densidade linear dada por $\lambda(x) = \lambda_0(1 + \frac{x}{L})$, onde x é a distância desde a extremidade esquerda. Determine simbolicamente a posição do centro de massa do fio em termos de L .

Exercício 8.52 (*Centro de massa de um sistema com massas pontuais*). Considere um sistema formado por quatro massas pontuais dispostas em posições distintas no plano cartesiano, como segue:

- Massa $m_1 = 3$ kg no ponto $(0, 0)$;
- Massa $m_2 = 2$ kg no ponto $(2, 3)$;
- Massa $m_3 = 4$ kg no ponto $(4, 0)$;
- Massa $m_4 = 1$ kg no ponto $(1, -2)$.

Determine as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa do sistema.

Exercício 8.53 (*Centro de massa de região entre reta e parábola*). Considere a região do plano delimitada superiormente pela reta $y = x + 2$ e inferiormente pela parábola $y = x^2$. Determine as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa dessa região, assumindo densidade constante.

Exercício 8.54 (*Centro de massa de região sob o gráfico de $y = \sin(x)$*). Determine as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa da região limitada superiormente pela curva $y = \sin(x)$ e inferiormente pelo eixo x , no intervalo $[0, \pi]$. Considere densidade constante.

Exercício 8.55 (*Centro de massa de região sob o gráfico de $y = \sin(x)$*). Determine as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa da região limitada superiormente pela curva $y = \sin(x)$ e inferiormente pelo eixo x , no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Considere densidade constante.

Exercício 8.56 (*Centro de massa de um trapézio com medidas específicas*). Um trapézio isósceles possui base maior medindo 12 unidades, base menor 6 unidades, e altura 9 unidades. O trapézio está orientado de modo que a base maior se encontra sobre o eixo x , centrada na origem, e a base menor está paralela a essa base, no topo da figura. O eixo y aponta para cima. Determine a posição do centro de massa desse trapézio, assumindo densidade constante.

Seção 8.6 – Aplicações Gerais

Exercício 8.57 (*Pressão média ao longo de um tubo*). A pressão $P(x)$, em pascals

(Pa), medida ao longo de um tubo de comprimento 10 metros, é modelada pela função:

$$P(x) = 5x^2 - 40x + 120,$$

onde x representa a posição ao longo do tubo, com $x \in [0, 10]$. Calcule a pressão média ao longo do tubo.

Exercício 8.58 (*Velocidade média com função trigonométrica*). Um ciclista percorre um trajeto de 8 horas, e sua velocidade instantânea (em km/h), ao longo do tempo t , é modelada pela função:

$$v(t) = 80 \cos^2 \left(\frac{\pi t}{16} \right),$$

onde $t \in [0, 8]$, com t em horas. Determine a velocidade média do ciclista nesse intervalo.

Exercício 8.59 (*Concentração média de medicamento no sangue*). Após a administração de um medicamento, a concentração no sangue (em mg/L) é dada pela função:

$$C(t) = \frac{30t}{t+3},$$

onde t representa o tempo em horas após a ingestão, com $t \in [0, 6]$. Determine a concentração média do medicamento no sangue nesse intervalo.

Exercício 8.60 (*Área da superfície de uma calota esférica*). Considere uma esfera de raio R , centrada na origem. A calota esférica é gerada pela rotação do arco do semicírculo superior descrito por $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ no intervalo $[a, b]$, com $0 < a < b \leq R$, ao redor do eixo x . Mostre que a área da superfície dessa calota é dada por:

$$A = 2\pi R(b - a).$$

Exercício 8.61 (*Superfície gerada pela rotação de uma reta*). Calcule a área da superfície gerada pela rotação da reta $y = 2x + 1$, no intervalo $[1, 3]$, em torno do eixo x .

Exercício 8.62 (*Área da calota esférica com raio 5 e altura 3*). Uma calota esférica de raio $R = 5$ tem altura $h = 3$. Calcule a área de sua superfície, supondo que ela foi obtida pela rotação de parte do semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$ em torno do eixo x .

Exercício 8.63 (*Força hidrostática sobre uma placa retangular*). Uma placa retangular vertical de 2 m de largura e 5 m de altura está totalmente submersa em um tanque cheio de água. A base da placa está apoiada no fundo do tanque, que possui profundidade total de 5 m. Calcule a força hidrostática exercida pela água sobre essa placa. Considere a densidade da água $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ e a aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Exercício 8.64 (*Força hidrostática sobre uma placa circular*). Uma placa circular de raio 1 m está totalmente submersa em um tanque cheio de água. A placa está posicionada verticalmente, com o diâmetro paralelo ao fundo do tanque e sua base apoiada no

fundo. A profundidade total da água no tanque é de 2 m. Calcule a força hidrostática exercida pela água sobre a face circular da placa.

Considere a densidade da água $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ e aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Exercício 8.65 (*Trabalho para bombear água de um tanque prismático*). Um tanque em forma de prisma reto tem base retangular de dimensões 2 m por 3 m, e altura 10 m. O tanque está completamente cheio de água. Calcule o trabalho necessário para bombear toda a água até uma altura de 5 m acima da superfície do tanque. Use $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Exercício 8.66 (*Determinação da função posição a partir da aceleração*). Um objeto move-se ao longo de uma trajetória retilínea, com aceleração dada por:

$$a(t) = 4 \sin(t) + t^2.$$

Sabendo que, no instante $t = 0$, a velocidade do objeto é $v(0) = 2 \text{ m/s}$ e a posição é $s(0) = 5 \text{ m}$, determine a função posição $s(t)$ para $t \geq 0$.

8.8 Resoluções dos Problemas

Seção 8.2 – Área entre Curvas

Problema 8.1

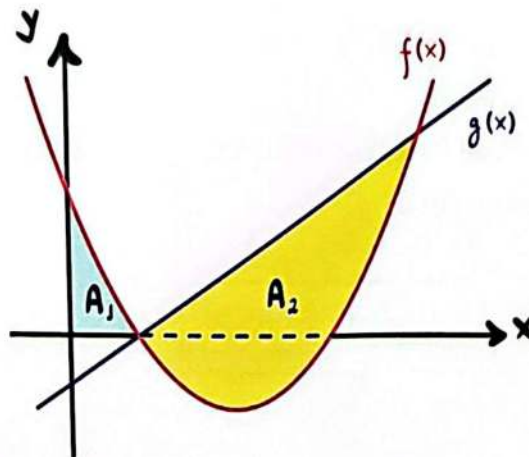


Figura 8.41: Áreas entre as curvas entre $x = 0$ e $x = 4$.

Analisando os gráficos das funções, que estão ilustrados na Figura 8.41, pode-se ver que:

- Para $x \in [0, 1)$, $f(x) > g(x)$;
- Para $x \in (1, 4]$, $g(x) > f(x)$.

Assim, calculamos a área total como a soma das áreas em módulo. Pode-se proceder de duas maneiras: ajustando o sinal a depender de qual for a função acima ou simplesmente integrar a diferença dos módulos das funções. Calculando individualmente, ficaria:

$$A_1 = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx \quad ; \quad A_2 = \int_1^4 [g(x) - f(x)] dx.$$

Ao fazer isso, as funções do integrando mudam de sinal, o que não gera muito transtorno, mas, pessoalmente, acho desnecessário. Acho preferível simplesmente considerar o resultado de cada integral em módulo, integrando sempre a mesma função, como segue:

$$A_1 = \left| \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx \right| \quad ; \quad A_2 = \left| \int_1^4 [f(x) - g(x)] dx \right|.$$

Repare que a função do integrando permaneceu igual, " $f(x) - g(x)$ ", em ambas e, pelo Exemplo 8.1, $f(x) - g(x) = x^2 - 5x + 4$. Sabemos de antemão que a segunda

integral renderá um valor negativo. Entretanto, ao inserir os módulos, o problema é resolvido. Calculando as integrais, temos:

$$\int_0^1 [x^2 - 5x + 4] dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x \right]_0^1 = \frac{11}{6}.$$

$$\int_1^4 [x^2 - 5x + 4] dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x \right]_1^4 = -\frac{9}{2}.$$

Como previsto, a segunda integral foi negativa. Assim, as áreas são dadas por $A_1 = \frac{11}{6}$ e $A_2 = \frac{9}{2}$. Resultado final:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{19}{3}.$$

Problema 8.2

Os gráficos das funções estão representados na Figura 8.42.

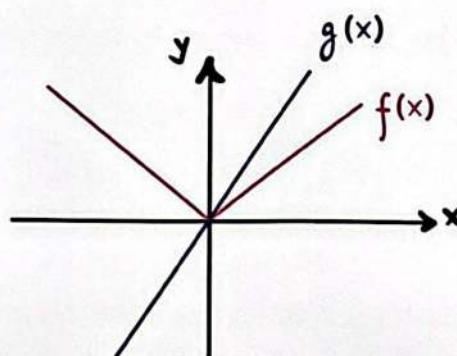


Figura 8.42: Gráfico das funções $f(x) = |x|$ e $g(x) = 2x$.

O primeiro ponto a ser analisado é que, por se existir uma função modular, teremos que dividir em casos. Analisando a função modular, temos:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Assim, teremos

$$\begin{array}{lll} \text{Para } x \geq 0 : & f(x) = x, & g(x) = 2x. \\ \text{Para } x < 0 : & f(x) = -x, & g(x) = 2x. \end{array}$$

Sem nos preocupar com qual função está acima ou abaixo, podemos calcular a

área total em módulo, procedendo da seguinte maneira:

$$A_1 = \left| \int_{-2}^0 ((-x) - (2x)) dx \right| = \left| \int_{-2}^0 (-3x) dx \right| = \left| -3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 \right| = |6| = 6.$$

$$A_2 = \left| \int_0^2 ((x) - (2x)) dx \right| = \left| - \int_0^2 x dx \right| = \left| \left[-\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \right| = |-2| = 2.$$

Somando as duas áreas, obtemos a área total $A = A_1 + A_2 = 6 + 2$, ou seja,:

$$\boxed{A = 8.}$$

Vale notar que o valor dentro do módulo da área A_2 foi negativo. Isso aconteceu, pois, conforme representado na Figura 8.42, quando $x \geq 0$, o gráfico da função $f(x)$ está abaixo de $g(x)$.

Problema 8.3

O primeiro passo é determinar os pontos de interseção entre as curvas. Então, temos

$$\sin(x) = \cos(x).$$

Dentre as diversas maneiras de resolver essa equação, acredito que a mais simples seja:

$$\sin(x) = \cos(x) \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 \Rightarrow \tan(x) = 1.$$

As primeiras soluções positivas para essa equação são $x = 45^\circ = \pi/4$ e $x = 225^\circ = 5\pi/4$. A Figura 8.43 ilustra a região cuja área A desejamos calcular.

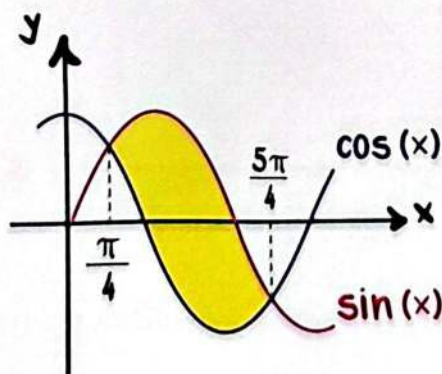


Figura 8.43: Área entre as funções $y = \sin x$ e $y = \cos x$.

Embora desnecessário, é possível observar que nesse intervalo a função $y = \sin(x)$

está acima da função $y = \cos(x)$. Assim, a área A entre as curvas é:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin(x) - \cos(x)) \, dx \\ &= [-\cos(x) - \sin(x)]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= (\sqrt{2} - (-\sqrt{2})) - (-\sqrt{2} - \sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Portanto, a área entre as curvas é:

$$A = 2\sqrt{2}.$$

Problema 8.4

Primeiro, identificamos que as funções estão dadas como x em função de y . O problema disso é que, como pode ser visto na Figura 8.44, há um trecho em que a região é delimitada na parte de cima e na de baixo pela mesma função (no caso, pela parábola). Isso faz com que o trabalho de integrar em termos de x seja muito grande. Portanto, temos duas alternativas:

1. Trabalhar com a função em y e adaptar nossa metodologia.
2. Simplesmente trocar as variáveis, ou seja, inverter x com y . Dessa maneira, o problema será “girado” 90° no plano. No entanto, isso faria com que nossa área da figura não se alteraria, uma vez que só mudamos, literalmente, a letra que representa cada variável, com o intuito de tornar o problema mais familiar.

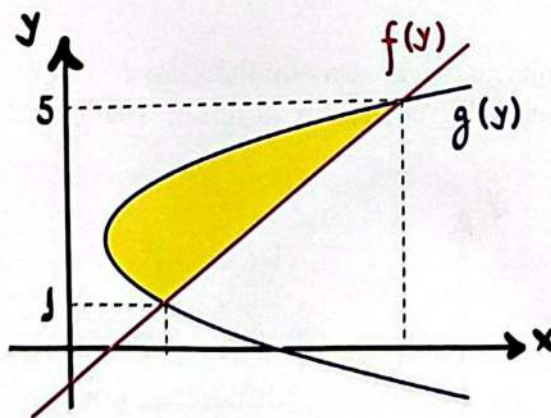


Figura 8.44: Área entre a reta e a parábola escrita como $x = f(y)$.

Para sair da zona de conforto e alongarmos o cérebro, façamos do primeiro modo. Igualando as funções, podemos determinar os pontos de interseção dos gráficos e fazer um esboço da situação que está ilustrada na Figura 8.44.

$$y^2 - 4y + 7 = 2y + 2 \Rightarrow y^2 - 6y + 5 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = 5.$$

Portanto, os limites de integração são $y = 1$ e $y = 5$.

A adaptação da metodologia que foi mencionada se refere ao fato de que agora estamos integrando na direção y , portanto, o diferencial é dy . Assim, de maneira genérica, a área A entre duas curvas descritas como $x = f(y)$ e $x = g(y)$ será dada por:

$$A = \int_{y_1}^{y_2} [f(y) - g(y)] dy.$$

Particularmente, no caso dessa questão, a área A procurada será dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^5 ((2y + 2) - (y^2 - 4y + 7)) dy \\ &= \int_1^5 (-y^2 + 6y - 5) dy \\ &= \left(-\frac{y^3}{3} + 3y^2 - 5y \right)_1^5 \\ &= \left(\frac{25}{3} \right) - \left(-\frac{7}{3} \right) = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, a área A é:

$$A = \frac{32}{3}.$$

Problema 8.5

A situação é mostrada na Figura 8.45.

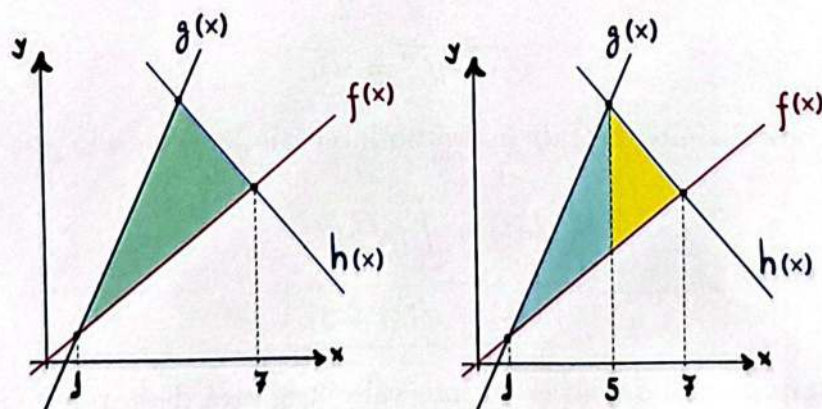


Figura 8.45: Triângulo ABC com retas dadas pelas funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.

Por serem conhecidos dois pontos em cada lado do triângulo, podemos determinar

as equações das retas que formam seus lados. Elas são dadas por:

$$\text{Reta AB: } f(x) = x$$

$$\text{Reta AC: } g(x) = 2x - 1$$

$$\text{Reta BC: } h(x) = -x + 14$$

O triângulo se estende de $x = 1$ a $x = 7$, e a área A pode ser calculada por duas integrais, conforme a Figura 8.45(b), como:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^5 (g(x) - f(x)) dx + \int_5^7 (h(x) - f(x)) dx \\ &= \int_1^5 (2x - 1 - x) dx + \int_5^7 ((-x + 14) - x) dx \\ &= \int_1^5 (x - 1) dx + \int_5^7 (-2x + 14) dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - x \right)_1^5 + (-x^2 + 14x)_5^7 \\ &= 8 + 4 = 12. \end{aligned}$$

Portanto, a área do triângulo é:

$$\boxed{A = 12.}$$

Seção 8.3 – Comprimento de Curvas

Problema 8.6

Dada a função $y = f(x) = 2x + 1$, temos:

$$\begin{aligned} y' &= 2, \\ \sqrt{1 + y'^2} &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

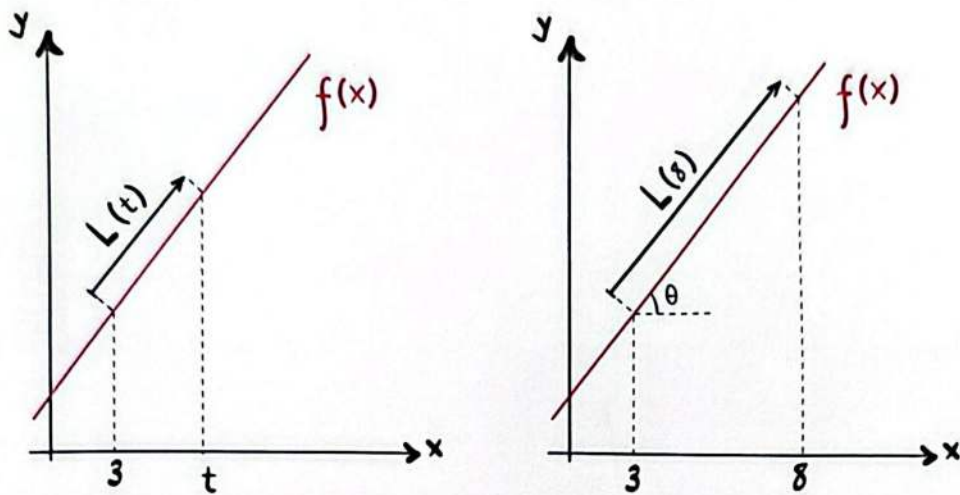
Assim, o comprimento $L(t)$ da curva no intervalo $[3, t]$ é dado por

$$\begin{aligned} L(t) &= \int_3^t \sqrt{5} dt \\ \boxed{L(t) &= \sqrt{5}(t - 3).} \end{aligned} \tag{8.26}$$

Logo, o comprimento da curva no intervalo $[3, 8]$ será dado por $L(8)$, ou seja,

$$\boxed{L(8) = 5\sqrt{5}.}$$

A Figura 8.46 ilustra o significado da função $L(t)$, assim como evidencia o valor $L(8)$.

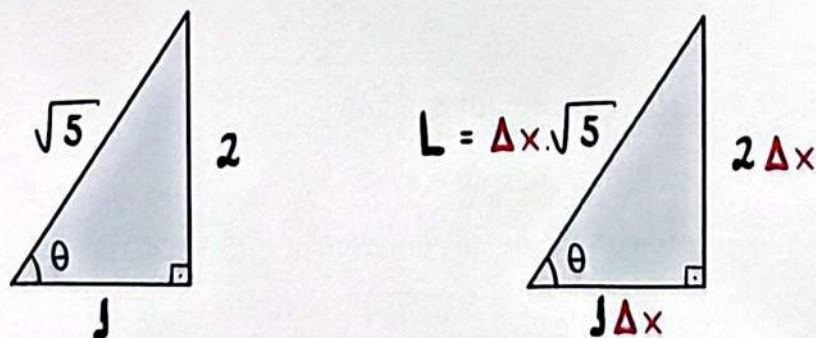
Figura 8.46: Interpretação da função $L(t)$.

Por se tratar de uma reta, pode-se verificar facilmente que o resultado anterior era exatamente o que esperávamos, pois conhecendo-se o comprimento do intervalo Δx no qual desejamos calcular, o comprimento L dessa curva será dado por:

$$\cos(\theta) = \frac{\Delta x}{L} \Rightarrow L = \frac{\Delta x}{\cos(\theta)}. \quad (8.27)$$

Como o coeficiente angular da reta é 2, temos $\tan(\theta) = 2$, e, através de uma trigonometria bastante simples (evidenciada no triângulo da Figura 8.47), chegamos que $\cos(\theta) = 1/\sqrt{5}$. Substituindo esse valor na Equação (8.27), obtemos:

$$L = \frac{\Delta x}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \Delta x \sqrt{5}.$$

Figura 8.47: Triângulo auxiliar tal que $\tan(\theta) = 2$.

Observe que esse resultado é exatamente igual ao encontrado na Equação (8.26), onde Δx equivale ao termo $(t - 3)$, uma vez que desejamos calcular o comprimento da curva começando em $x = 3$.

Problema 8.7

A semicircunferência superior é dada por:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{com } x \in [-r, r].$$

Derivando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}.$$

Substituindo na fórmula do comprimento de arco, o comprimento L dessa curva será:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= \int_{-r}^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= \int_{-r}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= r \int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx. \end{aligned}$$

Essa integral já apareceu para o leitor diversas vezes e pode ser resolvida facilmente fazendo a substituição $x = ur$, chegando à integral elementar abaixo, cuja solução é:

$$\int \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{r} \right) + C.$$

Aplicando os limites de integração, temos:

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx &= \arcsin \left(\frac{r}{r} \right) - \arcsin \left(\frac{-r}{r} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Logo, o comprimento L da semicircunferência é

$$L = r \cdot \pi,$$

de maneira que o comprimento C da circunferência é $C = 2L$, ou seja,

$$\boxed{C = 2\pi r.}$$

Problema 8.8

Derivando a função, temos:

$$y' = x^2 - \frac{1}{4x^2}.$$

O diferencial dL , então, é dado por:

$$\begin{aligned} dL &= \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ &= \sqrt{1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2} dx \\ &= \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2} dx \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx. \end{aligned}$$

Assim, o comprimento da curva é dado por:

$$L(t) = \int_1^t \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx$$

$$L(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12} + \frac{1}{4t}.$$

A Figura 8.48 ilustra essa situação.

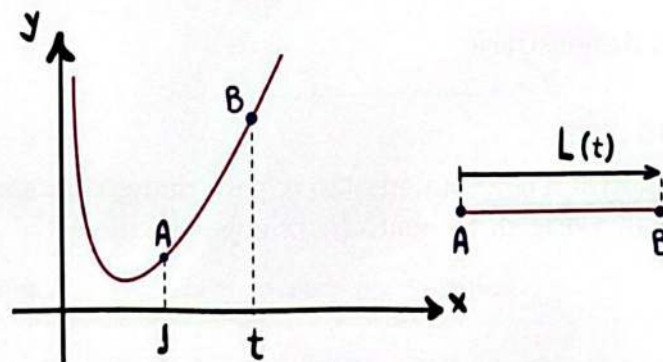


Figura 8.48: Função comprimento $L(t)$.

Seção 8.4 - Volume

Problema 8.9

Conforme sugerido, o cálculo será feito baseado na rotação da curva $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ em torno do eixo x . A Figura 8.49 ilustra essa situação.

Substituindo na fórmula:

$$V = \pi \int_{-r}^r [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx.$$

Como a função é par, podemos dobrar a integral de 0 a r , ou seja, calcular o volume

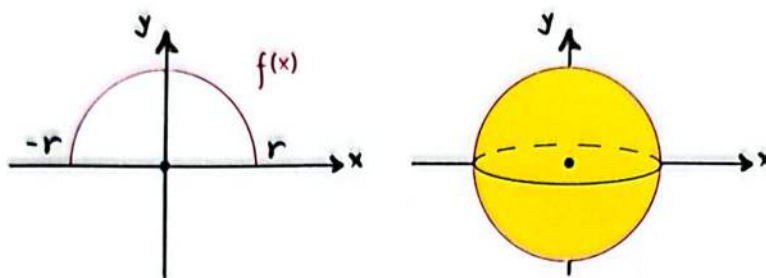


Figura 8.49: Rotação do semicírculo para obtenção da esfera.

por:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \\ &= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) \\ &= \frac{4\pi r^3}{3}, \end{aligned}$$

concluindo, assim, a demonstração.

Problema 8.10

A Figura 8.50 mostra o cone em questão e, para representar esse cone, podemos usar uma reta que liga a origem ao ponto (h, r) cuja equação é:

$$y = \frac{r}{h}x.$$

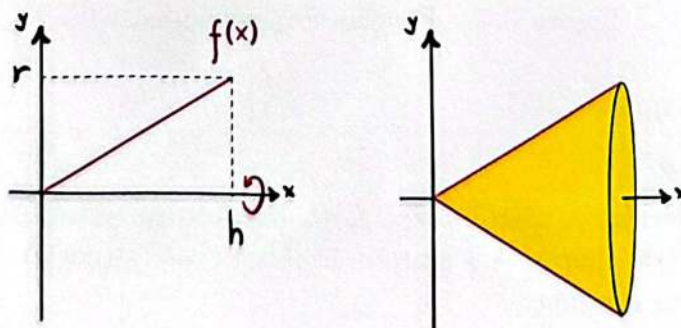


Figura 8.50: Volume do cone com raio da base r e altura h .

O volume V gerado pela rotação dessa reta em torno do eixo x , no intervalo $[0, h]$,

é dado por:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx \\
 &= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx \\
 &= \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h \\
 \boxed{V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h.}
 \end{aligned}$$

Problema 8.11

A Figura 8.51 ilustra a situação descrita no enunciado.

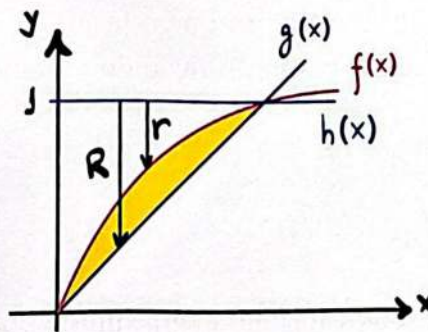


Figura 8.51: Região a ser rotacionada em torno da reta $h(x) = 1$.

Para determinar os pontos de interseção, fazemos:

$$x = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Como a região a ser rotacionada é definida entre duas curvas, a seção do sólido formado será uma coroa circular. Os raios dessa coroa são calculados a partir do eixo de rotação $y = 1$. Conforme a Figura 8.51, no intervalo $[0, 1]$, temos que a curva $f(x) = \sqrt{x}$ está acima da curva $g(x) = x$, portanto, os raios externo R e interno r dessa coroa serão dados por:

$$\begin{aligned}
 R(x) &= 1 - g(x) & \Rightarrow & & R(x) &= 1 - x \\
 r(x) &= 1 - f(x) & \Rightarrow & & r(x) &= 1 - \sqrt{x}
 \end{aligned}$$

Assim, podemos calcular o volume V por:

$$V = \pi \int_0^1 [R^2(x) - r^2(x)] dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi \int_0^1 [(1-x)^2 - (1-\sqrt{x})^2] dx \\
 &= \pi \int_0^1 (-3x + x^2 + 2\sqrt{x}) dx \\
 &= \pi \left[-\frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}x^{3/2} \right]_0^1
 \end{aligned}$$

$$V = \frac{\pi}{6}$$

Problema 8.12

Repare que a diferença entre esse problema e o anterior, o Problema 8.11, é o eixo de rotação que, nesse caso, será $x = -1$. Portanto, a lógica do problema será exatamente igual. Teremos apenas que adaptar a metodologia e escrever as funções em termos de y . (Esse problema, também, pode ser resolvido em termos de x pelo método das cascas cilíndricas. Sugiro que o faça.)

Primeiro, reescrevendo as curvas em função de y , temos:

- A curva $y = x$ se torna $x = y$.
- A curva $y = \sqrt{x}$ se torna $x = y^2$.

Novamente, a seção do sólido formado será uma coroa circular, cujos raios correspondem às distâncias das funções à reta $x = -1$. Observe que a reta está à direita da parábola, portanto, a reta definirá o raio externo R , enquanto o raio interno r será definido pela parábola, conforme a Figura 8.52. Assim, temos:

$$R(y) = 1 + y, \quad r(y) = 1 + y^2.$$

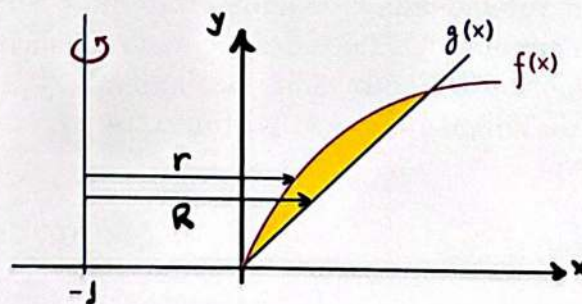


Figura 8.52: Região a ser rotacionada em torno da reta $x = -1$.

De maneira análoga à resolução feita no problema anterior, o volume V será

calculado como segue:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 [R^2(y) - r^2(y)] \, dx \\
 &= \pi \int_0^1 [(y+1)^2 - (y^2+1)^2] \, dx \\
 &= \pi \int_0^1 (-y^4 - y^2 + 2y) \, dy \\
 &= \pi \left[-\frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + y^2 \right]_0^1 \\
 &= \boxed{V = \frac{7\pi}{15}}
 \end{aligned}$$

Problema 8.13

Primeiro, determinamos onde a curva intercepta o eixo x , ou seja, onde $y = 0$:

$$2x - x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(2 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = \pm\sqrt{2}$$

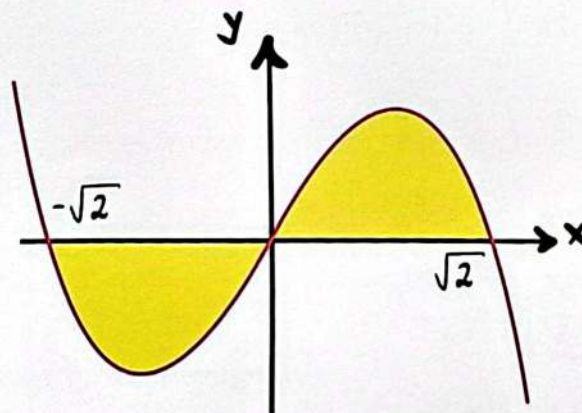


Figura 8.53: Gráfico da função $y = 2x - x^3$ com regiões a serem rotacionadas.

Note que a função é ímpar e, portanto, a curva é simétrica em relação à origem. Então, podemos calcular o volume de $x = 0$ a $x = \sqrt{2}$ e dobrar o resultado. A Figura 8.53 ilustra essa situação. Aplicando o método das cascas cilíndricas com a função dada, temos que o volume V será dado por:

$$V = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x(2x - x^3) \, dx = 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2x^2 - x^4) \, dx.$$

Efetuada a integral, constatamos que o volume V do sólido é:

$$V = \frac{32\pi\sqrt{2}}{15}.$$

Problema 8.14

Repare que esse mesmo problema foi resolvido no Exemplo 8.4, no entanto, utilizando outro método. Para aplicar o método das cascas cilíndricas com rotação em torno do eixo x , devemos integrar em relação a y . Assim, reescrevendo a função $y = x^2$, temos $x = \sqrt{y}$. Logo, a região a ser rotacionada está limitada:

- À direita, pela curva: $x = 1$;
- À esquerda, pela curva $x = \sqrt{y}$.

Dessa maneira, a altura $h(y)$ da casca é dada por:

$$h(y) = 1 - \sqrt{y}.$$

A distância da casca ao eixo de rotação (raio da casca) é simplesmente y . Portanto, o volume V do sólido pode ser calculado como:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int (\text{Raio da Casca}) \cdot (\text{Altura da Casca}) dy \\ &= 2\pi \int_0^1 y(1 - \sqrt{y}) dy \\ &= 2\pi \int_0^1 (y - y^{3/2}) dy \\ &= 2\pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{2}{5} y^{5/2} \right]_0^1 \end{aligned}$$

$$V = \frac{\pi}{5}.$$

Seção 8.5 – Centro de Massa

Problema 8.15

A posição $\bar{x}$ do centro de massa será dado por:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4,5}{2 + 4 + 4} \\ &= \frac{30}{10} \\ \bar{x} &= 3 \text{ m.} \end{aligned}$$

Problema 8.16

Consideremos, sem perda de generalidade, que a massa total da barra é $6M$. Assim, com a retirada do trecho entre $x = 1,0$ e $x = 1,5$, sobram duas barras com as seguintes características:

- Barra 1: $x_i = 0,0$; $x_f = 1,0$; $m_1 = 2M$;
- Barra 2: $x_i = 1,5$; $x_f = 3,0$; $m_2 = 3M$.

Por se tratar de uma barra homogênea, as barras remanescentes terão seus centros de massa localizados em seus respectivos pontos médios e, portanto, poderão ser calculados como segue:

$$\bar{x}_1 = \frac{0 + 1}{2} = 0,5; \quad \bar{x}_2 = \frac{1,5 + 3}{2} = 2,25.$$

Logo, a posição $\bar{x}$ do centro de massa do sistema remanescente será dado por:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\bar{x}_1 m_1 + \bar{x}_2 m_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{0,5 \cdot 2M + 2,25 \cdot 3M}{2M + 3M} \\ \boxed{\bar{x} = 1,55 \text{ m.}} \end{aligned}$$

Problema 8.17

As coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centro de massa do sistema podem ser calculadas usando a Equação (8.10) como segue:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}.$$

Aplicando com os valores fornecidos, temos:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{2 + 3 + 5} = \frac{11}{5}; \\ \bar{y} &= \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 4}{2 + 3 + 5} = 2. \end{aligned}$$

Assim, as coordenadas do centro de massa do sistema são:

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{11}{5}, 2 \right)}.$$

Problema 8.18

A ideia desse problema é calcular a massa e a posição do centro de massa de cada fio e, em seguida, proceder de maneira semelhante à que fizemos no problema anterior, Problema 8.17, como se fossem 3 corpos pontuais.

A massa de cada fio pode ser obtida rapidamente integrando a função densidade, ou seja:

$$m_1 = \int_0^{12} 2x_1 dx_1 = 144;$$

$$m_2 = \int_0^6 3x_2 dx_2 = 54;$$

$$m_3 = \int_0^9 4x_3 dx_3 = 162.$$

Com o intuito de facilitar nossa comunicação e podermos localizar o centro de massa, consideremos um sistema cartesiano com origem no ponto que conecta as barras 1 e 2, conforme a Figura 8.54(b).

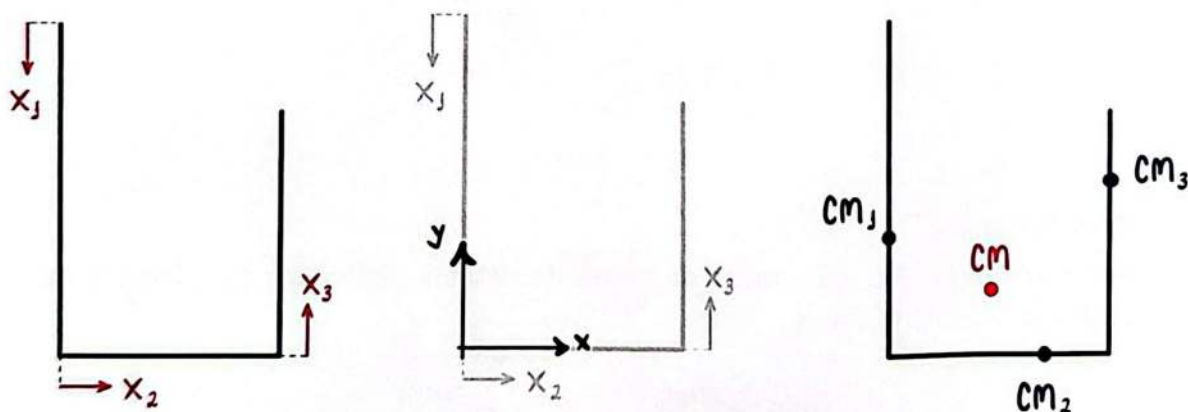


Figura 8.54: Posições do CM de cada fio e do CM do sistema.

Conforme mostrado no Exemplo 8.11, uma barra com densidade linear possui seu centro de massa localizado a $1/3$ do seu comprimento em relação à extremidade mais densa. Dessa maneira, conforme as medidas fornecidas pela Figura 8.40, as posições dos centros de massa das barras 1, 2 e 3 serão, respectivamente:

$$CM-1: (0, 4) \quad CM-2: (4, 0) \quad CM-3: (6, 6).$$

Dessa maneira, procedemos analogamente ao problema anterior, calculando a massa total M e as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centro de massa como segue:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 = 144 + 54 + 162 = 360 \text{ kg.}$$

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M} = \frac{144 \cdot 0 + 54 \cdot 4 + 162 \cdot 6}{360} = \frac{33}{10} = 3,3.$$

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M} = \frac{144 \cdot 4 + 54 \cdot 0 + 162 \cdot 6}{360} = \frac{43}{10} = 4,3.$$

Logo, as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa do sistema são:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (3,3; 4,3).$$

Problema 8.19

A Figura 8.55 ilustra a situação.

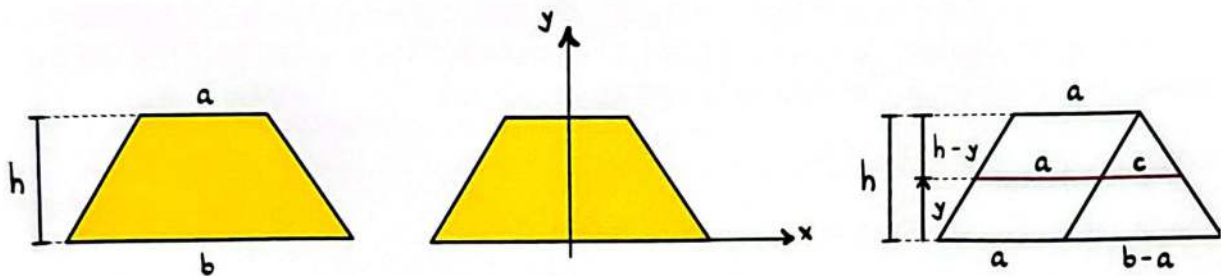


Figura 8.55: Centro de massa do trapézio isósceles.

Pela simetria em relação ao eixo y , temos:

$$\bar{x} = 0.$$

Para encontrar $\bar{y}$, consideramos o trapézio como formado por tiras horizontais de altura dy , com largura variável $\ell(y) = c(y) + a$. Essa largura pode ser calculada por semelhança de triângulos aplicada no triângulo da Figura 8.55(c).

$$\frac{c(y)}{b-a} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow \ell(y) = c(y) + a \Rightarrow \ell(y) = b - \left(\frac{b-a}{h}\right)y.$$

A área do trapézio é:

$$A = \int_0^h \ell(y) dy = \frac{(a+b)h}{2}.$$

A posição $\bar{y}$ do centro de massa pode ser calculado com a Equação (8.17), que resulta em:

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_0^h \ell(y) dy = \frac{\frac{bh^2}{2} - \frac{(b-a)h^2}{3}}{\frac{(a+b)h}{2}} = \frac{b+2a}{3(a+b)} \cdot h.$$

Assim, tem-se:

$$\bar{x} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{b + 2a}{3(a + b)} h.$$

Esse resultado pode ser considerado a generalização para o caso do triângulo. Observe que se considerarmos $a = 0$ ou $b = 0$, a figura se transforma em um triângulo. Nesse caso, a posição $\bar{y}$ do centro de massa será dada por:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{b + 2 \cdot 0}{3(0 + b)} \cdot h \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{1}{3} h.$$

$$b = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{0 + 2a}{3(a + 0)} \cdot h \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{2}{3} h.$$

Esses resultados corroboram algo que não só já demonstramos em exemplos anteriores, como também já conhecíamos da Geometria Plana: a distância do centro de massa de um triângulo até sua base é $\frac{1}{3}$ de sua altura.

Problema 8.20

A situação está ilustrada na Figura 8.56.

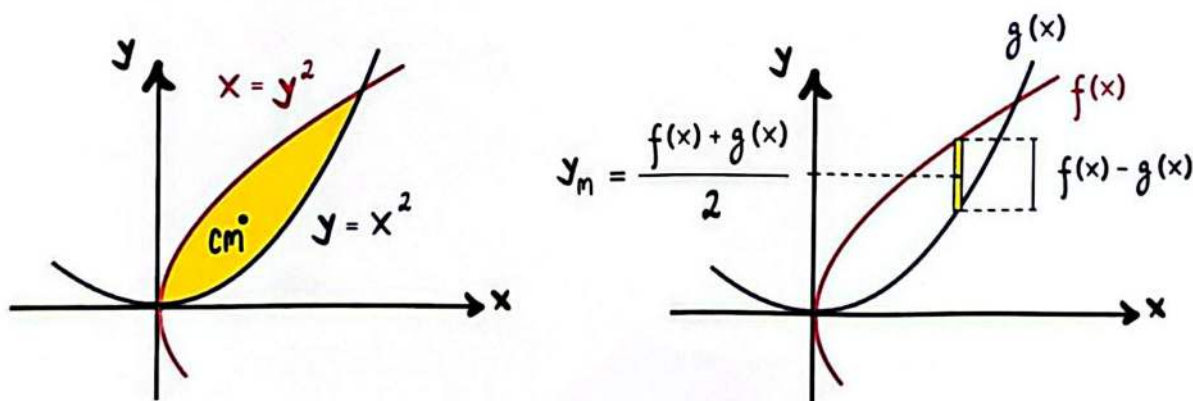


Figura 8.56: Região total e posição do CM de um retângulo vertical entre as curvas.

As curvas $y = x^2$ e $x = y^2$ se interceptam nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Escrevendo ambas as funções em termos de x , no intervalo $x \in [0, 1]$, a região delimitada está entre:

- A curva superior: $f(x) = \sqrt{x}$;
- A curva inferior: $g(x) = x^2$.

A área A da região pode ser calculada por:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

A coordenada $\bar{x}$ do centro de massa pode ser calculada através da Equação (8.17) como segue:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^1 x \cdot (\sqrt{x} - x^2) dx = 3 \int_0^1 (x^{3/2} - x^3) dx = 3 \cdot \frac{8-5}{20} = \frac{9}{20}.$$

No entanto, não podemos usar diretamente a Equação (8.17) para calcular a coordenada $\bar{y}$, uma vez que é uma região entre curvas. Nessa equação, o centro de massa de cada retângulo estava localizado à altura $\frac{f(x)}{2}$, uma vez que a premissa para o desenvolvimento dessa equação foi que a base do retângulo de altura $f(x)$ estava sobre o eixo x . No caso de um retângulo entre duas curvas, o centro de cada retângulo estará no ponto médio entre elas, ou seja:

$$y_m = \frac{f(x) + g(x)}{2} = \frac{\sqrt{x} + x^2}{2},$$

como evidenciado na Figura 8.56.

A altura $h(x)$ desse retângulo na posição x pode ser calculada pela diferença entre as funções, ou seja,

$$h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - x^2,$$

de modo que o elemento infinitesimal de área dA pode ser calculado por:

$$dA = h(x) dx = (\sqrt{x} - x^2) dx,$$

como também está evidenciado na Figura 8.56.

Assim, para obter a posição $\bar{y}$, fazemos:

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b y_m dA = \frac{1}{A} \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + x^2}{2} (\sqrt{x} - x^2) dx.$$

Resolvendo essa integral, temos:

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + x^2}{2} (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{9}{20}.$$

Dessa maneira, a posição $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa será:

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20} \right)}.$$

Observe que essa região possui simetria em relação à reta $y = x$, fato que garantiria de antemão que $\bar{x} = \bar{y}$. No entanto, com o intuito de nutrir o leitor com mais ferramentas, esse fato foi desconsiderado.

Problema 8.21

A Figura 8.57 ilustra essa situação.

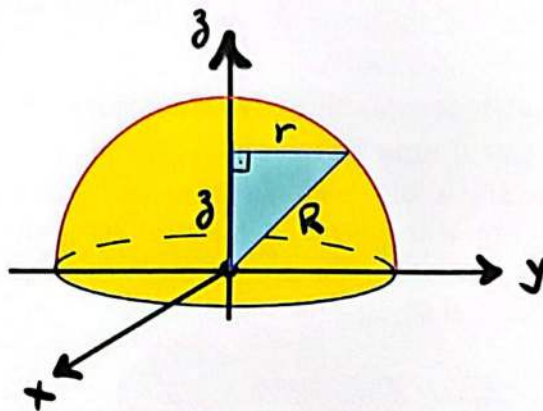


Figura 8.57: Hemisfério superior da esfera de raio R .

Pelo Teorema de Pitágoras, o raio r de uma seção a uma altura z com relação ao centro é dada por:

$$r = \sqrt{R^2 - z^2}.$$

Assim, a área $A(z)$ dessa seção é dada por:

$$A(z) = \pi r^2 = \pi(R^2 - z^2).$$

Aplicando essa função na Equação (8.19), lembrando que o volume da esfera é $V = \frac{4\pi R^3}{3}$, temos:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{4\pi R^3}{3}} \int_0^R z \cdot \pi(R^2 - z^2) dz \\ &= \frac{3}{2\pi R^3} \pi \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \\ \boxed{\bar{z} = \frac{3}{8} R.} \end{aligned}$$

Ou seja, o centro de massa do hemisfério se encontra a $\frac{3}{8}$ do seu centro.

Seção 8.6 – Aplicações Gerais

Problema 8.22

O valor médio da temperatura T_m no intervalo $[0, 12]$ é dado por:

$$T_m = \frac{1}{12} \int_0^{12} T(x) dx.$$

Substituindo a função:

$$T_m = \frac{1}{12} \int_0^{12} 30\pi \left(\cos\left(\frac{\pi x}{24}\right) \right)^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{24}\right) dx.$$

Colocando 30π em evidência e aplicando a substituição $u = \frac{\pi x}{24} \Rightarrow dx = \frac{24}{\pi} du$, com os novos limites de $u = 0$ a $u = \pi/2$:

$$T_m = \frac{30\pi}{12} \cdot \frac{24}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^3(u) \cdot \sin(u) du = 60 \int_0^{\pi/2} \cos^3(u) \cdot \sin(u) du.$$

Aplicando a substituição $v = \cos(u) \Rightarrow dv = -\sin(u) du$, obtemos:

$$T_m = 60 \int_0^1 v^3 dv = 60 \cdot \left[\frac{v^4}{4} \right]_0^1 = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15.$$

Portanto, a temperatura média no intervalo de 0 a 12 horas foi de:

$$\boxed{T_m = 15^\circ\text{C.}}$$

Problema 8.23

A equação do semicírculo superior de raio R , centrado na origem, é:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, R].$$

A fórmula da área da superfície de revolução em torno do eixo x é:

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Derivando $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, temos:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \Rightarrow \quad [f'(x)]^2 = \frac{x^2}{R^2 - x^2}.$$

Assim, a área A da esfera pode ser calculada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-R}^R 2\pi \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx \\ &= \int_{-R}^R 2\pi \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \int_{-R}^R 2\pi R dx \\ &= 2\pi R \int_{-R}^R dx = 2\pi R \cdot (2R) \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 4\pi R^2.}$$

Portanto, a área da superfície da esfera é $4\pi R^2$, como queríamos demonstrar. ■

Problema 8.24

Fazendo uso da sugestão, dada a função $f(x) = x + 2$, temos:

$$f'(x) = 1 \Rightarrow \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Substituindo na fórmula da área de superfície de revolução, temos:

$$A = \int_0^3 2\pi(x+2) \cdot \sqrt{2} dx = 2\pi\sqrt{2} \int_0^3 (x+2) dx.$$

Calculando a integral:

$$\int_0^3 (x+2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^3 = \left(\frac{9}{2} + 6 \right) = \frac{9}{2} + \frac{12}{2} = \frac{21}{2}.$$

Ou seja, a área A da superfície de revolução é dada por:

$$A = 2\pi\sqrt{2} \cdot \frac{21}{2}$$

$$A = 21\pi\sqrt{2}.$$

Problema 8.25

A Figura 8.58 ilustra a situação descrita no enunciado. Observe que a coordenada y está orientada para baixo, onde $y = 0$ corresponde à superfície do tanque.

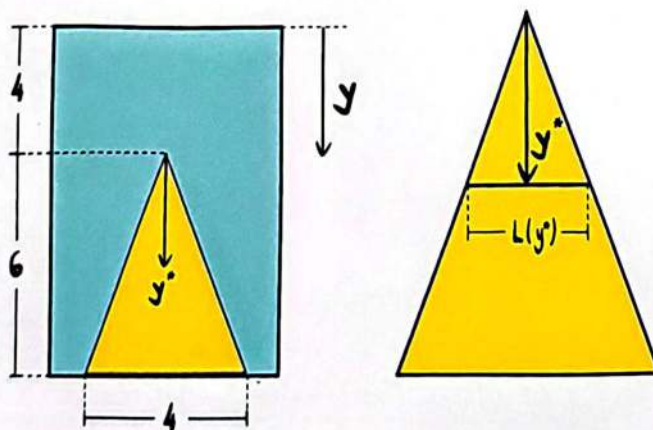


Figura 8.58: Placa triangular submersa.

Repare que, à medida que a profundidade aumenta, tanto a pressão quanto a largura da placa aumentam, o que faz com que haja um aumento da área e, consequentemente, da força hidrostática. Ou seja, a força aumenta devido a dois fatores.

Precisamos, então, equacionar ambos, ou seja, definir as funções $P(y)$ e $L(y)$, que correspondem, respectivamente, à pressão e à largura da placa a uma profundidade y .

Definir a função $P(y)$ é simples, como segue:

$$P(y) = \rho g y = 10.000y.$$

Para facilitar a determinação da função $L(y)$, considere uma coordenada y' que se inicia no vértice do triângulo. Por semelhança, é fácil ver que:

$$\frac{L(y^*)}{4} = \frac{y^*}{6} \Rightarrow L(y^*) = \frac{2}{3}y^*.$$

Observe, no entanto, que a relação entre y e y^* é dada por:

$$y = y^* + 4 \Rightarrow y^* = y - 4.$$

Assim, a largura será dada por:

$$L(y) = \frac{2}{3}(y - 4).$$

Considerando um infinitesimal de profundidade dy , a área dA desse elemento infinitesimal nessa profundidade será:

$$dA = L(y) \cdot dy = \frac{2}{3}(y - 4)dy.$$

Assim, a força infinitesimal dF nesse trecho da placa é dada por:

$$dF = P(y) \cdot dA = 10.000y \frac{2}{3}(y - 4) dy = \frac{20.000}{3}(y^2 - 4y) dy.$$

Portanto, a força total F pode ser calculada por:

$$\begin{aligned} F &= \int dF \\ &= \int_4^{10} \frac{20.000}{3}(y^2 - 4y) dy \\ &= \frac{20.000}{3} \left[\frac{y^3}{3} - 2y^2 \right]_4^{10} \\ &= 960.000. \end{aligned}$$

Assim, a força hidrostática total existente sobre a barra é de $\boxed{F = 960.000 \text{ N}}$.

Problema 8.26

Esse problema pode ser resolvido de maneira semelhante ao problema anterior, Problema 8.25, com a diferença da função área. A Figura 8.59 representa a situação descrita.

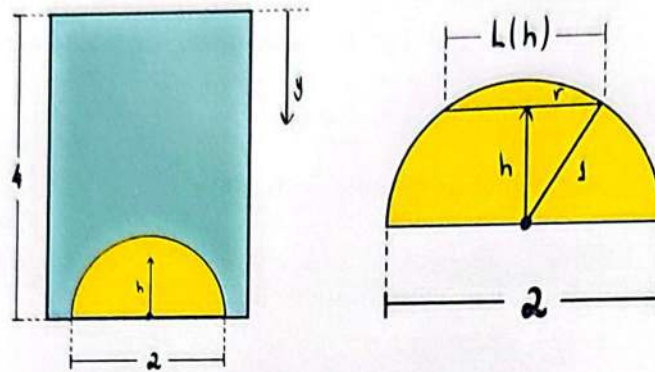


Figura 8.59: Semicírculo submerso.

A pressão $P(y)$ à profundidade y é dada por:

$$P(y) = \rho g y = 10.000y.$$

Definindo uma variável auxiliar h com origem no centro do semicírculo, conforme a Figura 8.59, calculamos a largura da faixa horizontal $L(h)$ pelo Teorema de Pitágoras, como segue:

$$L(h) = 2r = 2\sqrt{1 - h^2}.$$

Observando que a relação entre as variáveis y e h é: $y + h = 4$, temos $h = 4 - y$, o que nos permite escrever a expressão acima em termos de y , como segue:

$$L(y) = 2\sqrt{1 - (4 - y)^2}.$$

Portanto, a área dA do elemento infinitesimal com altura dy é dada por:

$$dA = L(y) dy = 2\sqrt{1 - (4 - y)^2} dy.$$

Assim, a força infinitesimal dF aplicada sobre essa região é calculada por:

$$dF = P(y) dA = 10.000y \cdot 2\sqrt{1 - (4 - y)^2} dy = 20.000y\sqrt{1 - (4 - y)^2} dy.$$

Dessa forma, a força hidrostática total F sobre a placa será dada por:

$$\begin{aligned} F &= \int dF \\ &= \int_3^4 20.000y\sqrt{1 - (4 - y)^2} dy \\ &= 20.000 \int_3^4 y\sqrt{1 - (y - 4)^2} dy. \end{aligned}$$

Nesse ponto, o problema já está inteiramente formulado, bastando resolver a integral. Minha sugestão para solução é a que segue.

Fazemos a substituição $u = y - 4$, então, $du = dy$, e os limites mudam:

$$\begin{array}{lll} y = 3 & \Rightarrow & u = -1; \\ y = 4 & \Rightarrow & u = 0. \end{array}$$

Além disso, $y = u + 4$. Substituindo, fica:

$$F = 20.000 \int_{-1}^0 (u + 4) \sqrt{1 - u^2} du = 20.000 \left(\int_{-1}^0 u \sqrt{1 - u^2} du + \int_{-1}^0 4 \sqrt{1 - u^2} du \right).$$

A primeira integral pode ser resolvida pela substituição $v = 1 - u^2$, resultando em:

$$\int_{-1}^0 u \sqrt{1 - u^2} du = -\frac{1}{3}.$$

A segunda integral pode ser resolvida pela substituição trigonométrica $u = \sin \theta$, resultando em:

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1 - u^2} du = \frac{\pi}{4}.$$

Assim, a força total F consiste na soma de ambos os valores, ou seja,

$$F = 20.000 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\boxed{F \approx 56.000 \text{ N.}}$$

Problema 8.27

A Figura 8.60 ilustra a situação.

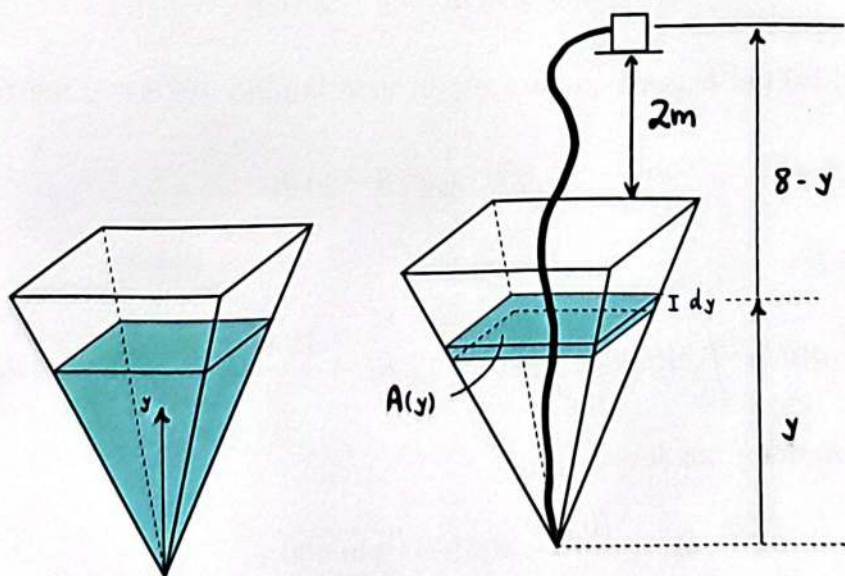


Figura 8.60: Bomba retirando água do recipiente no formato de pirâmide.

Adotamos a coordenada vertical y orientada para cima a partir do vértice da pirâmide, de maneira que $y = 0$ corresponde ao fundo e $y = 6$ corresponde à superfície. Essa água precisa ser levada até uma altura $y = 8$.

Cada lâmina horizontal de água localizada em uma coordenada y será elevada até uma altura de $8 - y$ metros, pois a bomba está 2 m acima da superfície.

A seção horizontal da pirâmide com altura y é um quadrado de lado $l(y)$, que pode ser calculado por semelhança de triângulos como segue:

$$\frac{2}{6} = \frac{l(y)}{y}$$

$$l(y) = \frac{1}{3}y.$$

Logo, a área $A(y)$ dessa seção é:

$$A(y) = l(y)^2 = \frac{1}{9}y^2.$$

O volume de uma lâmina de espessura dy é:

$$dV = A(y) \cdot dy = \frac{1}{9}y^2 dy.$$

A massa da lâmina é:

$$dm = \rho dV = 1.000 \cdot \frac{1}{9}y^2 dy.$$

A força peso correspondente é:

$$dF = dm \cdot g = 10.000 \cdot \frac{1}{9}y^2 dy.$$

O trabalho infinitesimal necessário para elevar essa lâmina até $8 - y$ metros é:

$$dW = 10.000 \cdot \frac{1}{9}y^2(8 - y) dy.$$

O trabalho total é:

$$W = \int dW = \int_0^6 10.000 \cdot \frac{1}{9}y^2(8 - y) dy = \frac{10.000}{9} \int_0^6 y^2(8 - y) dy.$$

cuja solução é simples e nos leva a:

$$W = \frac{10.000}{9} \cdot 252 = \boxed{280.000 \text{ J}}.$$

Portanto, o trabalho necessário para bombear toda a água da pirâmide de 6 metros até 2 metros acima da superfície é $\boxed{280.000 \text{ J}}$.

Problema 8.28

O trabalho realizado para esticar a mola de $x = 0$ até $x = 0,5$ metro é dado pela integral da força em função da posição:

$$W = \int_0^{0,5} f(x) dx = \int_0^{0,5} 60x^2 dx.$$

Calculando a integral:

$$\int_0^{0,5} 60x^2 dx = 60 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{0,5} = 60 \cdot 0,125 = \boxed{2,5 \text{ J}}.$$

Portanto, o trabalho necessário para esticar a mola até 0,5 m é $\boxed{2,5 \text{ J}}$.

Apêndice A

Número de Euler

Esse apêndice será melhor aproveitado após o estudo completo da teoria proposta no livro. Busca-se aqui explorar a importância e o significado do número e , personagem que protagonizou importantes façanhas ao longo de toda a construção da nossa teoria.

O leitor certamente já se convenceu que tal número é bastante especial, posto que ele compõe a única função, $f(x) = e^x$, cuja derivada — e , consequentemente, cuja integral — é igual a si mesma. Porém, o que faz esse número ser tão especial e por que exatamente ele, e não algum outro, ocupa espaço tão central na Matemática?

De onde surge o número de Euler?

A pergunta que guia o nascimento do número e é:

“Quanto cresce uma quantidade que se realimenta constantemente de si mesma?”

Suponha que você invista **1 real** com uma taxa de **100% ao ano**. Uma taxa absurda, sim, mas irá nos atender no nosso experimento matemático.

Se o pagamento for feito uma única vez, no fim do ano, é simples: você dobra seu capital:

$$C = (1 + 1)^1 = 2.$$

No entanto, e se o rendimento for entregue em **duas parcelas** semestrais, cada uma de 50% sobre o capital acumulado? Nesse caso, ao fim do primeiro semestre, o capital total é

$$C_1 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5.$$

Ao fim do segundo semestre, os juros de 50% incidem sobre o capital acumulado acima, sendo a quantia final igual a

$$C_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25.$$

O ganho já ficou um pouco maior — e sem investir mais. É o efeito dos juros compostos no tempo.

Digamos agora que o banqueiro resolveu dividir o ano em quatro trimestres, quebrando os juros de 100% em quatro taxas iguais de 25% que são pagas a cada três meses sobre o saldo anterior. Assim, após o fim do ano, o capital total seria:

$$C = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2,4414.$$

Caso ele resolvesse pagar juros mensais, teríamos um rendimento mensal de 100%/12 incidindo a cada mês sobre o saldo anterior. Ao fim do ano, teríamos

$$C = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2,6130.$$

Caso os juros fossem semanais, igualmente distribuídos ao longo das 52 semanas do ano, ao fim do ano teríamos

$$C = \left(1 + \frac{1}{52}\right)^{52} = 2,6926.$$

E, caso os juros fossem diários, ao fim do ano o capital seria

$$C = \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2,7146.$$

Em um contexto ainda mais absurdo em que os juros fossem pagos por hora, sendo 24 horas em cada dia, teríamos $24 \cdot 365 = 8.760$ pagamentos de juros, em valores iguais, incidindo sobre o saldo anterior. No fim do ano, o capital final seria

$$C = \left(1 + \frac{1}{8.760}\right)^{8.760} = 2,7181.$$

A cada subdivisão do tempo, ganhamos mais retorno. Porém, esse crescimento vai diminuindo em ritmo: cada incremento é menor que o anterior. Aproximamo-nos de um *limite invisível*, um teto de crescimento que não pode ser superado, apenas assintoticamente alcançado — é o limite da autossustentação exponencial.

E se, em vez de pagar juros a cada hora, pagássemos a cada minuto? A cada segundo? A cada batida do tempo? Se abandonássemos de vez o calendário e permitíssemos que os juros fluíssem como um rio, *sem intervalos*?

É neste exato ponto que entra a definição mais célebre do número e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (\text{A.1})$$

A expressão acima é exatamente a definição que usamos para o número de Euler na Equação (3.1).

Esse é o número que responde à pergunta: *Qual é o valor máximo que 1 real pode se tornar, com 100% de juros compostos pagos continuamente ao longo de um ano?*

A resposta é:

$$C = e \approx 2,718281828 \dots$$

Equivalência entre definições

Existem algumas formas de se definir o número de Euler, a mais clássica delas sendo a que foi feita acima. Contudo, fazendo $x = 1$ na Equação (5.6), vemos que uma forma de definir e pode ser através da expressão:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad (\text{A.2})$$

Vamos provar que tal definição é equivalente àquela da Equação (A.1).

Prova

Usando o Teorema Binomial, isto é,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

façamos $x = 1$ e $y = 1/n$. Assim, teremos:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k! n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \right). \end{aligned}$$

Note que, tomando o limite em que $n \rightarrow \infty$, cada fator dentro do parênteses à direita tende a 1, de modo que concluímos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

como queríamos demonstrar. ■

Definição da derivada unitária ao cortar o eixo vertical

Além disso, no Capítulo 4 usamos uma definição alternativa para o número de Euler. Na Definição 4.2, afirmamos que o número de Euler e é o único número a que satisfaz a equação:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1. \quad (\text{A.3})$$

Tal limite, como já é evidente para o leitor, trata-se da derivada da função exponencial $f(x) = a^x$ em $x = 0$. Logo, o número e é a base da função exponencial que possui derivada unitária ao cortar o eixo vertical, conforme discutimos no Capítulo 4. Atestemos, pois, a veracidade desse fato.

Prova

Queremos computar:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Sabemos que a função exponencial pode ser expressa por sua série de Taylor centrada em $x = 0$:

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots$$

Subtraindo 1 e dividindo por h , teremos:

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots$$

Fazendo $h \rightarrow 0$, todos os termos com potências de h desaparecem, restando:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

como queríamos demonstrar. ■

Logo, a definição tradicional de e implica diretamente sua definição como o *único número real* $a = e$ tal que a derivada de a^x no ponto $x = 0$ é igual a 1.

Derivada e integral

Vimos ao longo da teoria que a função $f(x) = e^x$ possui duas propriedades únicas:

(i) Sua derivada é igual a si mesma:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

(ii) Sua integral é igual a si mesma, a menos de uma constante:

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Ou seja, e^x é uma função autogeradora: o que ela é agora é o quanto ela cresce. Além disso, o que ela cresceu até agora é igual a si mesma. Essa é uma propriedade sem paralelo entre todas as funções elementares.

Um crescimento proporcional ao que já se é torna-se um modelo matemático perfeito para tudo que

- se replica (crescimento de populações),
- se retroalimenta (como o capital nos juros compostos),
- decai de forma proporcional ao que se tem (como em um processo radioativo),
- se propaga (como ondas eletromagnéticas).

Isso faz com que a função $f(x) = e^x$ seja de importância singular e fundamental para diversas áreas do conhecimento que envolvem modelagem matemática.

A derivada representa o *ímpeto de crescimento* — a taxa instantânea de variação. Se a derivada de uma função é igual a si mesma, isso significa que a própria coisa equivale, numericamente, ao seu próprio impulso. O que ela *é* é igual ao seu ímpeto de *tornar-se*.

Isso é uma bela metáfora para sistemas autônomos ou autoregulados. É função do **instante**, onde ser e tornar-se coincidem.

Já a integral é o *acúmulo do passado*. Quando a integral de uma função é igual a si mesma, isso significa que sua história, seu rastro, seu somatório... apenas o reconduzem de volta a si.

Em certo sentido, a função e^x é **atemporal**: o passado e o futuro estão inscritos nela sem deformação. Cada ponto é suficiente para determinar todos os outros. Ela não carrega memória deformada: apenas continuidade pura.

Se π mede o círculo e sua permanência, e mede o fluxo e a transformação. Ele surge no coração do Cálculo, da Física, da Biologia, da Economia — onde quer que haja algo que *cresça proporcionalmente ao que já é*.

Ele é o número do *vir-a-ser*. O número do instante que contém todos os instantes. O número do *crescimento perfeito*.

Apêndice B

Fórmula para soma dos quadrados dos n primeiros números naturais

No Capítulo 6, utilizamos a fórmula para a soma dos quadrados dos primeiros n números naturais, enunciada na Equação (6.2). Faremos agora a demonstração de tal fórmula, por meio do Princípio da Indução Finita, como segue.

Demonstração

Queremos provar que:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Passo 1: Base da indução ($n = 1$)

É trivial perceber que a fórmula vale para $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}.$$

Passo 2: Hipótese de indução

Assumimos que a fórmula é válida para n , isto é, é verdade que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Passo 3: Passo indutivo

Mostremos que, sendo válido para n , isso implica que vale, também, para $(n+1)$, isto é:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Podemos escrever a soma dos quadrados dos $(n+1)$ naturais como sendo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) + (n+1)^2. \\ \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2. \end{aligned} \quad \text{(pela hipótese de indução)}$$

Manipulando, teremos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \end{aligned}$$

em que usamos $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$, como o leitor pode facilmente verificar. Portanto, a fórmula está demonstrada por indução. ■

Apêndice C

Frações Parciais

Esse apêndice tem por objetivo detalhar o método conhecido por *Decomposição em Frações Parciais* e munir o leitor com essa ferramenta que é amplamente utilizada no Capítulo 7. Essa é uma técnica usada para decompor funções racionais — cujo grau do polinômio do numerador é menor que o grau do polinômio do denominador — em frações mais simples. Ela tem aplicação em vários campos na Matemática, especialmente quando o assunto é *integração*.

Uma coisa, porém, é comum a todos os casos: fatoração do denominador. Fica o alerta ao leitor que é admitido aqui que ele já conta com todos os conhecimentos necessários para efetuar fatorações algébricas. Caso esse não seja seu caso, sugiro que o faça em um futuro próximo para que a leitura se torne mais fluida. Sugestões para aprofundamento são *Teorema das Raízes Racionais*, as *Relações de Girard*, *Divisão de Polinômios*, entre outros temas relacionados às equações algébricas. Dito isso, sigamos para o método.

O Método

Esse método pode ser generalizado para qualquer grau de funções, uma vez que a lógica que será apresentada pode ser extrapolada indefinidamente. No entanto, em termos de utilidade prática, o leitor lidará apenas com funções cujos denominadores podem ser fatorados em, no máximo, termos quadráticos. Então, basicamente, as transformações a serem executadas são as duas que seguem:

$$\frac{P(x)}{(x-r)^n} = \frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \frac{A_3}{(x-r)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(x-r)^n}, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}. \quad (\text{C.2})$$

Na Equação (C.2), consideramos denominadores irredutíveis, pois, caso tivessem raízes reais, poderiam ser decompostos em fatores lineares, que nos fariam desaguar na Equação (C.1).

No entanto, essas equações por si só não nos ajudam muito. Porém, a boa notícia é que podemos, também, realizar combinações entre situações listadas acima, assim como combinar frações que envolvam mais de um termo do mesmo tipo, ou seja, frações compostas por mais de um termo do tipo da Equação (C.1) ou da Equação (C.2). Tudo isso está detalhado mais adiante, mas, antes de seguir com o método, repare nos principais elementos lógicos utilizados na decomposição:

1. Fatoração mais simples possível (aqui denominada *fatoração elementar*) do denominador. Ela vai ditar o rumo da decomposição.
2. O numerador é composto por termos com um grau a menos da *fatoração elementar* do denominador.
3. O número de termos na decomposição é igual ao expoente n da *fatoração elementar*. Os expoentes dos denominadores da fração decomposta variam de 1 a n .

Nosso objetivo será sempre encontrar os coeficientes A_k e B_k que fazem a decomposição da fração original em frações parciais. No entanto, como é comum aparecerem frações formadas pela combinação das Equações (C.1) e (C.2), vejamos alguns casos que ilustram as situações descritas.

Denominador com termos lineares simples

Considere a fração a seguir:

$$\frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3}.$$

O denominador é uma expressão quadrática cuja fatoração conta com dois fatores lineares simples:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

Assim, essa fração é composta por termos descritos pela Equação (C.1) e, portanto, a decomposição pode ser feita como se segue:

$$\frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3}.$$

A determinação dos coeficientes A e B , independentemente de qual seja o caso, pode ser feita através de dois métodos:

1. Igualdade de polinômios.
2. Aplicação de valores para x .

Será feito um exemplo com cada método e, a partir daí, por se tratar de um trabalho mecânico, as contas serão omitidas. Começamos aplicando o método da igualdade de polinômios. Para isso, o termo da direita será desenvolvido de maneira a colocar

em evidência os coeficientes que acompanham a parcela linear x e os coeficientes que fazem parte do termo independente.

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} &= \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{x(A+B) + (-3A-B)}{(x-1)(x-3)}.\end{aligned}$$

Por se tratar da mesma expressão, podemos igualar, como segue:

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{x(A+B) + (-3A-B)}{x^2-4x+3}$$

Aplicando, então, a igualdade de polinômios no numerador, temos que:

$$\begin{cases} A+B = 3, \\ -3A-B = -5. \end{cases}$$

A solução do sistema é $A = 1$ e $B = 2$. Portanto, pode-se escrever:

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3},$$

o que finaliza a decomposição da função.

Vejam a situação seguinte:

$$\frac{5x^2 - 10x + 1}{x^3 - 3x^2 - x + 3}.$$

O primeiro passo sempre é fatorar o denominador. Apesar de ser uma expressão de grau 3, foi escolhido propositalmente um exemplo cuja fatoração é relativamente fácil de ser feita, sem que seja necessário utilizar recursos muito rebuscados. Seguindo com a fatoração, temos:

$$\begin{aligned}x^3 - 3x^2 - x + 3 &= x^2(x-3) - 1(x-3) \\ &= (x-3)(x^2-1) \\ &= (x-3)(x-1)(x+1).\end{aligned}$$

Repare que, novamente, são fatores lineares simples. Então, novamente aplicando a decomposição de termos lineares da Equação (C.1), temos:

$$\frac{5x^2 - 10x + 1}{(x-3)(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Multiplicando ambos os lados pelo denominador comum:

$$5x^2 - 10x + 1 = A(x-1)(x+1) + B(x-3)(x+1) + C(x-3)(x-1). \quad (\text{C.3})$$

Para determinação dos coeficientes A , B e C , vamos utilizar o método alternativo à igualdade de polinômios. Repare que a igualdade deve ser válida para todo valor de x . Portanto, pode-se usar valores específicos mais convenientes. Usualmente os melhores valores são aqueles que zeram parte da equação que, nesse caso, são $x = 1$, $x = -1$ e $x = 3$. Aplicando esses valores na Equação (C.3), temos:

$$\begin{array}{llll} x = 1 & \Rightarrow & -4 = A(0)(2) + B(-2)(2) + C(-2)(0) & \Rightarrow \boxed{B = 1} \\ x = -1 & \Rightarrow & 16 = A(-2)(0) + B(-4)(0) + C(-4)(-2) & \Rightarrow \boxed{C = 2} \\ x = 3 & \Rightarrow & 16 = A(2)(4) + B(0)(4) + C(0)(2) & \Rightarrow \boxed{A = 2} \end{array}$$

Portanto, a decomposição em frações parciais resulta em:

$$\frac{5x^2 - 10x + 1}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{2}{x - 3} + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 1}.$$

Denominador com termos lineares com multiplicidade superior.

A fração a ser decomposta agora é:

$$\frac{2x - 5}{(x - 1)^2(x - 2)}.$$

Comece observando que o denominador continua sendo escrito em termos cuja fatoração elementar é linear. Então, ainda seguindo o que foi enunciado pela Equação (C.1), a decomposição pode ser feita como segue:

$$\frac{2x - 5}{(x - 1)^2(x - 2)} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 2)}.$$

Determinar os valores dos coeficientes não é o foco do momento, mas pode ser verificado que os valores que satisfazem a decomposição acima são $A = 1$, $B = 3$ e $C = -1$.

Um caso que na prática é inviável de ser solucionado manualmente e que coloco aqui apenas a título de visualização é o que segue:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{(x - 1)^3(x + 3)^2(x + 1)} &= \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3} + \\ &+ \frac{D}{(x + 3)} + \frac{E}{(x + 3)^2} + \frac{F}{(x + 1)}. \end{aligned}$$

Denominador com termos quadráticos simples.

Considere agora a fração

$$\frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}.$$

Repare que o denominador é o produto de duas expressões de grau 2 que, no entanto, não podem ser decompostas em fatores lineares. Poderiam, sim, se forem consideradas raízes complexas. Nesse caso, teríamos:

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i) \quad ; \quad x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i).$$

No entanto, apenas raízes reais são consideradas na decomposição em frações parciais.

Repare, então, que essa fração poderia ser decomposta utilizando uma combinação de termos da Equação (C.2), ficando, portanto, na forma:

$$\frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A_1x + B_1}{(x^2 + 1)} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + 4)}$$

Para determinar os coeficientes A e B , pode-se proceder da mesma maneira que fizemos nos exemplos anteriores, chegando, então, a $A_1 = 0$, $B_1 = 1$, $A_2 = 0$ e $B_2 = -1$, ou seja, a decomposição resultaria em:

$$\frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{1}{(x^2 + 1)} - \frac{1}{(x^2 + 4)}.$$

Denominador com termos quadráticos de multiplicidade superior.

Para ilustrar essa situação, considere a fração:

$$\frac{7x + 4}{(x^2 + 9)^3(x^2 + 2x + 5)}.$$

Repare que, assim como o $(x^2 + 9)$, o termo $(x^2 + 2x + 5)$ também não admite raízes reais e, portanto, não pode ser decomposto em fatores lineares. Então, aplicando novamente uma combinação de termos dados pela Equação (C.2), a decomposição dessa fração fornece:

$$\frac{3}{(x^2 + 9)^3(x^2 + 2x + 5)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 9)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 9)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 9)^3} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 2x + 5)}.$$

Repare que o trabalho para a obtenção de todos os coeficientes de forma manual é grande, no entanto, a estrutura da decomposição não se altera.

Denominador com termos lineares e quadráticos.

Esse é um caso formado pela combinação de termos apresentados pelas Equações (C.1) e (C.2) e, portanto, seguem estritamente a mesma lógica descrita ao longo desse apêndice. Considere então, por exemplo, a fração:

$$\frac{P(x)}{(x - 1)^3(x + 2)(x^2 + 3)^2(x^2 - x + 3)}$$

No denominador temos termos lineares simples e de multiplicidade superior, assim como termos quadráticos simples e de multiplicidade superior. No entanto, na prática, isso não faz diferença. Aplicando as decomposições dadas pelas Equações (C.1) e (C.2), a fração poderá ser reescrita como:

$$\frac{P(x)}{(x-1)^3(x+2)(x^2+3)^2(x^2-x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x+2)} + \frac{Ex+F}{(x^2+3)} + \frac{Gx+H}{(x^2+3)^2} + \frac{Ix+J}{(x^2-x+3)}.$$

Naturalmente, a essa altura estamos apenas aplicando e visualizando o método de uma maneira mais ampla. Deve ser pouco factível a probabilidade de o leitor precisar efetuar uma decomposição com 10 coeficientes.

Conforme demonstrado, o ponto principal do método é dar total atenção às Equações (C.1) e (C.2) e observar que qualquer situação é uma composição desses dois casos. Com isso em mente, o leitor está munido de todas as ferramentas para decompor qualquer função racional.

Numerador com grau igual ou superior

A única situação não tratada, até o momento, é aquela na qual o grau do polinômio do numerador é igual ou superior ao do denominador. Essa situação requer apenas um passo a mais antes da aplicação da decomposição em frações parciais.

Para apresentação da ideia, considere a fração:

$$\frac{2x^2 - 3x + 4}{x^2 + x - 3}.$$

Nesse ponto, pode-se proceder simplesmente dividindo os polinômios. Porém, como creio que o leitor certamente espera um grau de elegância mais alto de nossa parte, procederemos sem aplicação de algum conteúdo, algoritmo ou alguma outra ferramenta. Faremos uso apenas do intelecto, de maneira que qualquer ser dotado da capacidade de somar e multiplicar, possuindo uma quantidade mínima de brio, é capaz de acompanhar a seguinte manipulação:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - 3x + 4}{x^2 + x - 3} &= \frac{2(x^2 + x - 3) - 5x + 10}{x^2 + x - 3} \\ &= \frac{2(x^2 + x - 3)}{x^2 + x - 3} + \frac{-5x + 10}{x^2 + x - 3} \\ &= 2 + \frac{-5x + 10}{x^2 + x - 3}. \end{aligned}$$

Observe que, após feita essa manipulação, temos um termo fora da fração e outro que possui o exato formato daquele enunciado nas equações no início do apêndice. A estratégia utilizada foi basicamente *forçar* o aparecimento do termo do denominador no numerador e completar os coeficientes remanescentes de maneira a manter a igualdade. Seguem outros dois exemplos nos quais utiliza-se a mesma ideia. Ao longo das

equações, há alguns pontos de interrogação. Eles sinalizam os momentos-chave em que é recomendado que o leitor tente, por si só, calcular quais são os termos a serem inseridos.

$$\begin{aligned}\frac{3x+1}{x-2} &= \frac{3(x-2)+?}{x-2} \\ &= \frac{3(x-2)+7}{x-2} \\ &= \frac{3(x-2)}{x-2} + \frac{7}{x-2} \\ &= 3 + \frac{7}{x-2}.\end{aligned}$$

Outro exemplo, que requer um pouco mais de manipulação, é:

$$\begin{aligned}\frac{3x^2-4x+5}{x-2} &= \frac{3x(x-2)+?}{x-2} \\ &= \frac{3x(x-2)+2x+5}{x-2} \\ &= \frac{3x(x-2)}{x-2} + \frac{2x+5}{x-2} \\ &= 3x + \frac{2x+5}{x-2} \\ &= 3x + \frac{2(x-2)+?}{x-2} \\ &= 3x + \frac{2(x-2)+9}{x-2} \\ &= 3x + \frac{2(x-2)}{x-2} + \frac{9}{x-2} \\ &= 3x + 2 + \frac{9}{x-2}.\end{aligned}$$

A partir daqui, o procedimento de decomposição em frações parciais pode ser utilizado normalmente.

Apêndice D

Derivadas vs Integrais

Este breve apêndice se dedica a esclarecer o motivo pelo qual a integração é uma operação substancialmente mais complicada do que a derivação – ainda que uma seja o inverso da outra.

Desde os primeiros passos no estudo do Cálculo, aprendemos a derivar com certa fluidez. As regras do produto, da cadeia, as potências e exponenciais são aplicadas mecanicamente após alguma prática. Em contraste, a integração logo se revela mais resistente: requer criatividade, mudança de variável, integração por partes, substituições e, em muitos casos, não oferece uma solução fechada. Porém, por que, conceitualmente, a integração é tão mais desafiadora do que a derivação?

A diferença reside em uma distinção profunda entre o local e o global. Derivar é uma operação local: como um “microscópio matemático”, ela examina o comportamento da função em um ponto, ignorando o que ocorre em torno dele. Basta saber como a função se comporta nas imediações para extrair sua taxa de variação naquele ponto.

Integrar, por outro lado, é uma operação global. Ela exige um “telescópio”: precisamos considerar o comportamento da função ao longo de um intervalo inteiro. Não basta saber como a função varia pontualmente; é necessário acumular informação, agregando pedaços, como quem soma infinitos tijolos para formar um edifício.

Derivar é como tirar uma fotografia de um filme. Ao congelar um único quadro, você vê a velocidade do movimento naquele instante. O foco está no agora: a variação naquele ponto, a direção e intensidade do momento.

Integrar é como montar todo o filme a partir de milhares de fotos. É necessário organizar cada imagem na ordem certa, com a duração exata, para reconstruir a história. É uma operação mais trabalhosa, pois requer contexto, continuidade e sequência.

No fundo, derivar é apenas um recorte, enquanto integrar é a montagem completa; tarefa, naturalmente, bem mais árdua.

Derivar é fácil, porque é local. Integrar é difícil, porque é global. Essa distinção vai além da técnica e toca o cerne filosófico do Cálculo: entender como o todo emerge da parte, como o movimento gera forma, como o infinitesimal se transforma em tota-

lidade. Por isso, aprender a integrar é mais do que resolver problemas: é desenvolver uma nova forma de pensar, mais abrangente, paciente e conectada com a natureza contínua do mundo.